الثانوية التأهيلية مولاي رشيد- أجلموس	المتتاليات العددية	المستوى: 2Bac PC+SVT
الأستاذ : محمد إعلو	Suites Numériques	عدد الساعات: 15

المتتاليات العددية

أهداف الدرس

❖ تعرف نهاية متتالية مرجعية ❖ تعرف متتالية متقاربة ❖ استعمال مصاديق التقارب لتحديد نهاية متتالية ❖ تعرف نهاية المتتالية (a^n) ❖ تعرف متتالية (u_n) بحيث $u_{n+1} = f(u_n)$ ❖ تعرف متتالية (u_n) بحيث $u_{n+1} = au_n + b$ ❖ وتحديد نهايتها.	❖ تعرف متتالية (u_n) بحيث $u_{n+1} = \dfrac{au_n + b}{cu_n + d}$ ❖ استعمال نهايات المتتاليات المرجعية لتحديد نهاية متتالية عددية. ❖ دراسة تقارب متتالية تزايدية و مكبورة ، و متتالية تناقصية و مصغورة ❖ تحديد نهاية متتالية انطلاقا من نهاية متتالية هندسية أو متتالية حسابية

القدرات المنتظرة

❖ استعمال المتتاليات الهندسية و الحسابية في دراسة أمثلة من متتاليات من الشكل $u_{n+1} = au_n + b$ و $u_{n+1} = \dfrac{au_n + b}{cu_n + d}$.

❖ استعمال المتتاليات المرجعية و مصاديق التقارب لتحديد نهايات متتاليات عددية.

❖ استعمال المتتاليات في حل مسائل متنوعة من مجالات مختلفة.

❖ تحديد نهاية متتالية (u_n) متقاربة من الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث f دالة متصلة على مجال I و تحقق $f(I) \subset I$.

الامتدادات

❖ الحساب التكاملي ❖ الدوال اللوغارتمية و الدوال الأسية ❖ الأعداد العقدية	❖ علوم الحياة و الأرض ❖ الفيزياء و الكيمياء ❖ العلوم الاقتصادية

فقرات الدرس

❖ نهاية متتالية عددية
❖ نهايات المتتاليات المرجعية
❖ تقارب متتالية عددية
❖ العمليات على نهايات المتتاليات العددية
❖ المتتاليات و الترتيب
❖ مصاديق تقارب متتالية عددية.
❖ متتاليات خاصة

I)- نهاية متتالية عددية

1)- نهاية منتهية لمتتالية عددية *Limite finie d'une suite*

نشاط01

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n>0}$ المعرفة بما يلي: $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$.

1) – أحسب الحدود u_1 و u_9 و u_{10} و u_{99} و u_{100}.

2) – أ- تحقق من أنه إذا كان $n \geq 10$ فإن $u_n \in \left]1 - \frac{1}{10}, 1 + \frac{1}{10}\right[$.

ب- ليكن $\varepsilon > 0$. بين أنه إذا كان $n \geq N = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$ فإن $u_n \in \left]1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon\right[$.

ج- استنتج أن كل مجال مفتوح مركزه 1 يحتوي على جميع حدود المتتالية ابتداء من رتبة معينة.

نقول إن نهاية المتتالية $(u_n)_{n>0}$ تؤول إلى 1 عندما يؤول n إلى $+\infty$ و نكتب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

تعريف

نقول إن نهاية المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq n_0}$ عندما يؤول n إلى $+\infty$ هي العدد الحقيقي l إذا كان كل مجال مفتوح مركزه l يحتوي على جميع حدود المتتالية ابتداء من رتبة معينة ، و نكتب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$.

خاصية

إذا كانت متتالية عددية $(u_n)_{n \geq n_0}$ تقبل نهاية منتهية ، فهي وحيدة.

أمثلة: متتاليات مرجعية *Suites de références*

➢ المتتاليات العددية التالية: $\left(\frac{1}{n}\right)_{n>0}$ و $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n>0}$ و $\left(\frac{1}{n^3}\right)_{n>0}$ و $\left(\frac{1}{\sqrt[p]{n}}\right)_{n>0}$ و $\left(\frac{1}{n^p}\right)_{n>0}$ حيث $p \in \mathbb{N}^*$:
متتاليات تؤول إلى الصفر عندما يؤول n إلى $+\infty$.

2)- نهاية لا منتهية لمتتالية *Limite infinie d'une suite*

نشاط02

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_n$ المعرفة بما يلي: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2n + 1$.

1) – أحسب الحدود التالية: u_1 و u_9 و u_{10} و u_{99} و u_{100}.

2) – أ- تحقق من أنه إذا كان $n \geq 50$ فإن $u_n \in \left]100, +\infty\right[$.

ب- ليكن $A > 0$. تحقق من أنه إذا كان $n \geq E\left(\frac{A-1}{2}\right) + 1$ فإن $u_n \in \left]A, +\infty\right[$.

ج- استنتج أن كل مجال $\left]A, +\infty\right[$ يحتوي على جميع حدود المتتالية $(u_n)_n$ ابتداء من رتبة معينة.

نقول إن نهاية المتتالية $(u_n)_n$ تؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول n إلى $+\infty$ و نكتب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

تعريف

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية .

- نقول إن نهاية المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq n_0}$ عندما يؤول n إلى $+\infty$ هي $+\infty$ إذا كان كل مجال من النوع $]A,+\infty[$ يحتوي على جميع حدود المتتالية ابتداء من رتبة معينة ، و نكتب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- نقول إن نهاية المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq n_0}$ عندما يؤول n إلى $+\infty$ هي $-\infty$ إذا كان كل مجال من النوع $]-\infty,A[$ يحتوي على جميع حدود المتتالية ابتداء من رتبة معينة ، و نكتب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

أمثلة: متتاليات مرجعية

- المتتاليات العددية التالية: $(n)_n$ و $(n^2)_n$ و $(n^3)_n$ و $(\sqrt[p]{n})_n$ و $(n^p)_n$ ، حيث $p\in\mathbb{N}^*$: متتاليات عددية تؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول n إلى $+\infty$.

ملاحظة

- إذا كانت $u_n=f(n)$ حيث f دالة عددية معرفة على مجال من نوع $[a,+\infty[$ ، و إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ (حيث $l\in\mathbb{R}$ أو $l=+\infty$ أو $l=-\infty$) فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = l$.

تمرين 01

أحسب نهاية المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها العام في الحالات التالية:

$u_n=-2n^3+3n-1$ و $u_n=\dfrac{n+1}{n^3+n+1}$ و $u_n=\dfrac{2n^2+1}{n^2-1}$ و $u_n=\sqrt[3]{n^3+1}-n$

II)- تقارب متتالية عددية *Convergence d'une suite numérique*

تعريف

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية .

- نقول إن المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متقاربة (*Convergente*) إذا كانت تقبل نهاية منتهية.
- نقول إن المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متباعدة إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$ أو المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ لا تقبل نهاية .

أمثلة

- المتتالية (u_n) المعرفة بحدها العام $u_n=1+\dfrac{1}{n^2+1}$ متقاربة و لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
- المتتالية (u_n) المعرفة بحدها العام $u_n=2n^2$ متباعدة و لدينا: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- المتتالية (u_n) المعرفة بحدها العام $u_n=(-1)^n$ متباعدة و لا تقبل نهاية.

خاصية

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية و $l\in\mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-l)=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}|u_n-l|=0$

مثال

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي: $\forall n\in \mathbb{N}^*, u_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$.

لدينا : $\forall n\in \mathbb{N}^*, |u_n|=\left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right|=\dfrac{1}{n}$ ، إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n|=0$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

III)- العمليات على نهايات المتتاليات – المتتاليات و الترتيب

1)- العمليات على النهايات

لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين عدديتين و l و l' أعدادا حقيقية.

أ)- الجمع

$\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} (u_n+v_n)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I	

ب- الضرب

$\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	
$\lim\limits_{x\to+\infty} (u_nv_n)$	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I	

ج- المقلوب

$\lim\limits_{x\to+\infty} v_n$	$l\in\mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{v_n}$	$\dfrac{1}{l}$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$

د- الخارج

$\lim\limits_{+\infty} u_n$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ $l>0$	$-\infty$ $l<0$	$+\infty$ $l>0$	$-\infty$ $l<0$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{+\infty} v_n$	$l'\neq 0$	$\pm\infty$	$l>0$	$l<0$	$l>0$	$l<0$	0^+	0^+	0^-	0^-	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$	$\dfrac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I	

مثال

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{n} - 2n$.

لندرس تقارب المتتالية (u_n):

لدينا : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{n}\left(1 - 2\sqrt{n}\right)$ ، و بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = -\infty$.

إذن المتتالية (u_n) متباعدة.

تمرين02

لتكن $(u_n)_{n \geq 2}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $u_2 = 1$ و $u_{n+1} = \left(1 + \dfrac{2}{n-1}\right)u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

1) – بين بالترجع أن: $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}, u_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

2) – استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 2}$ متباعدة .

2)- النهايات و الترتيب

خاصية

لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين عدديتين متقاربتين بحيث: $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = l$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} v_n = l'$

- إذا كان $u_n > v_n$ لكل $n \geq n_0$ حيث $(n_0 \in \mathbb{N})$ فإن $l \geq l'$.
- إذا كان $u_n > 0$ لكل $n \geq n_0$ حيث $(n_0 \in \mathbb{N})$ فإن $l \geq 0$.

مثال

لتكن (u_n) و (v_n) المتتاليتين العدديتين المعرفتين بما يلي:

$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{n}$ و $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{n}$.

1) – أ- تحقق من أن $\forall n > 3, u_n > 0$.

ب- أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$ و تحقق من أن $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n \geq 0$

2) – أ- بين أن $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n < v_n$.

ب- أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} v_n$ و تحقق من أن $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = \lim\limits_{x \to +\infty} v_n$.

IV)- مصاديق تقارب متتالية : Critères de converge d'une suite numérique

خاصية1

لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين عدديتين ، و l و α عددين حقيقيين بحيث $\alpha > 0$.

إذا كان $|v_n - l| \leq \alpha u_n$ لكل $n \geq n_0$ ، (n_0 عدد صحيح طبيعي معلوم) و $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = 0$ فإن،

المتتالية (v_n) متقاربة و $\lim\limits_{x \to +\infty} v_n = l$.

خاصية2

لتكن (u_n) و (v_n) و (w_n) متتاليات عددية.
إذا كان $v_n \le u_n \le w_n$ لكل $n \ge n_0$ ، (n_0 عدد صحيح طبيعي معلوم) و $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n = \lim\limits_{x\to+\infty} w_n = l$
فإن المتتالية (u_n) متقاربة و $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = l$.

مثال

لتكن $(u_n)_{n\ge1}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1 - \frac{\sin n}{n^2}$.

لدينا: $-1 \le -\sin n \le 1$ و منه : $1 - \frac{1}{n^2} \le u_n \le 1 + \frac{1}{n^2}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$.

و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ فإن $(u_n)_{n\ge1}$ متقاربة و $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = 1$.

تمرين03

لتكن $(u_n)_{n\ge1}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \frac{n}{n^2+3} + \dots + \frac{n}{n^2+n}$.

1)- بين أن $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n^2}{n^2+n} \le u_n \le \frac{n^2}{n^2+1}$.

2)- استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ متقاربة ، و أن $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = 1$.

خاصية3

لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين عدديتين و α عددا حقيقيا موجبا قطعا.

- إذا كان $v_n \ge \alpha u_n$ لكل $n \ge n_0$ ،(n_0 عدد صحيح طبيعي معلوم) و $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = +\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n = +\infty$
- إذا كان $v_n \le \alpha u_n$ لكل $n \ge n_0$ ،(n_0 عدد صحيح طبيعي معلوم) و $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = -\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n = -\infty$

مثال

لتكن $(u_n)_{n\ge1}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = -2n + 3\sin\frac{2\pi}{n}$.

لدينا : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \le -2n + 3$ (لأن $\sin\frac{2\pi}{n} \le 1$) .

و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} -2n + 3 = -\infty$ فإن المتتالية (u_n) متباعدة و $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = -\infty$.

تمرين04

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $u_0 = 0$ و $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \sqrt{1 + u_n^2}$.

1)- بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 1$.

2)- بين أن (u_n) تزايدية.

1) – بين أن $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \ge n$ ، ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

خاصية4

- كل متتالية تزايدية و مكبورة هي متقاربة.
- كل متتالية تناقصية و مصغورة هي متقاربة.

ملاحظة

- كل متتالية تزايدية و سالبة هي متتالية متقاربة.
- كل متتالية تناقصية و موجبة هي متتالية متقاربة.

مثال

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $u_0 = 4$ و $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

1) - بين بالترجع أن : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$.

2) - بين أن المتتالية (u_n) تناقصية .

3) استنتج أنها متقاربة.

ملاحظة

الخاصية السابقة تبين فقط أن المتتالية متقاربة و لا تمكن من تحديد نهايتها .

V)- متتاليات خاصة

1)- تقارب المتتالية (a^n)

خاصية

- إذا كان $a > 1$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} a^n = +\infty$.
- إذا كان $a = 1$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} a^n = 1$.
- إذا كان $-1 < a < 1$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} a^n = 0$.
- إذا كان $a \leq -1$ فإن (a^n) لا تقبل نهاية.

مثال

أحسب النهايات التالية: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \sqrt{2}\right)^n$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}\right)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n\right)$.

تمرين05 : (الدورة الاستدراكية2008)

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{5u_n}{2u_n + 3}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

1) – بين أن $u_n > 1$ ، لكل n من $\mathbb{N}$.

2) – نضع : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$ ، لكل n من $\mathbb{N}$.

أ)- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{5}$ ثم أكتب v_n بدلالة n.

ب)- بين أن $u_n = \frac{2}{2 - \left(\frac{3}{5}\right)^n}$ ، لكل n من $\mathbb{N}$ ، ثم أحسب نهاية (u_n).

تمرين06 : (الدورة الاستدراكية2007)

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n - 4n - 1)$ ، لكل n من $\mathbb{N}$.

نضع : $v_n = u_n + n - 1$ ، لكل n من $\mathbb{N}$.

1) – بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{5}$.

2) – أ- أحسب v_n بدلالة n.

ب - استنتج u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$.

3) – نضع : $T_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ و $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ حيث n عنصر من $\mathbb{N}$.

بين أن : $T_n = \frac{1}{4}\left(5 - \frac{1}{5^n}\right)$ و أن : $S_n = T_n - \frac{(n+1)(n-2)}{2}$.

تمرين 07

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي:

$u_0 = 2$ و $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{5u_n - 1}{u_n + 3}$.

نضع: $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.

1)- أحسب u_1 و v_0.

2)- بين بالترجع أن $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1$.

3)-برهن أن (v_n) حسابية و حدد أساسها.

4)- أ- حدد v_n ثم u_n بدلالة n.

ب- أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$.

تمرين08

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي:

$u_0 = 1$ و $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{u_n}$.

نضع: $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$.

1)- أحسب u_1 و v_0.

2)- بين أن (v_n) هندسية وحدد أساسها.

3)- أ- حدد v_n ثم u_n بدلالة n.

ب- أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$.

تمرين09

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي:

$u_0 \in]-1,0[$ و $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{2 + u_n}}$.

1)- بين أن $\forall n \in \mathbb{N}, -1 < u_n < 0$.

2)- بين أن $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq \frac{u_0}{\sqrt{2 + u_0}}$.

3)- أ- استنتج أن $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq \frac{u_0}{\left(\sqrt{2 + u_0}\right)^n}$.

ب- أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$.

تمرين10

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي:

$u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{u_n^3}{1 + 3u_n^2}$.

1) – أ- بين أن $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

ب- بين أن المتتالية (u_n) تناقصية.

2)- أ- بين أن $u_{n+1} \leq \frac{1}{3}u_n$ ، لكل n من $\mathbb{N}$.

ب- استنتج أن $u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ ، لكل n من $\mathbb{N}$.

ج- أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$.

2)- تقارب المتتالية $(v_n)_{n\geq n_0}$ بحيث $v_n=f(u_n)$

خاصية

إذا كانت المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متقاربة نهايتها l ، و f دالة متصلة في l فإن المتتالية $(v_n)_{n\geq n_0}$ المعرفة بما يلي: $v_n=f(u_n)$ حيث $n\geq n_0$ متقاربة و نهايتها هي $f(l)$.

مثال

لنحدد نهاية المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي: $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\sin\left(\dfrac{\pi n^2}{1+6n^2}\right)$.

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi n^2}{1+6n^2}=\dfrac{\pi}{6}$ و بما أن الدالة $x\mapsto\sin x$ متصلة في $\dfrac{\pi}{6}$ فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n=\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$.

3)- نهاية المتتالية $(n)^{\alpha}_{n\in\mathbb{N}}$ حيث $\alpha\in\mathbb{Q}$

خاصية

ليكن $\alpha\in\mathbb{Q}$. لدينا :

- $\lim\limits_{x\to+\infty}n^{\alpha}=+\infty$ إذا كان $\alpha>0$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}n^{\alpha}=0$ إذا كان $\alpha<0$.
- إذا كان $\alpha=0$ فإن $\forall n\in\mathbb{N}^*, n^{\alpha}=1$

مثال

لنحسب نهاية المتتالية (u_n) حيث $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\dfrac{1-n^{-2}}{1+\sqrt[3]{n^2}}$.

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-n^{-2})=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+n^{\frac{2}{3}}\right)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt[3]{n^2}\right)=$

إذن المتتالية (u_n) متقاربة و لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n=0$.

خاصية

لتكن f دالة عددية متصلة على مجال I بحيث $f(I)\subset I$ ،
و لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول من المجال I و العلاقة الترجعية $u_{n+1}=f(u_n)$.
إذا كانت المتتالية (u_n) متقاربة فإن نهايتها حل للمعادلة $f(x)=x$.

مثال1

نعتبر المتتالية $(u_n)_n$ المعرفة بما يلي: $u_0=\dfrac{1}{2}$ و $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\dfrac{5}{2}u_n(1-u_n)$.

1)- مثل مبيانيا الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{5}{2}x(1-x)$.

2)- نعتبر المجال $I=\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{2}\right]$.

أ- بين أن $u_0\in I$ و أن $f(I)\subset I$.

ب- بين أن المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة ثم استنتج نهاية المتتالية $(u_n)_n$.

مثال2

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $u_0 = 2$ و $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$.

1)- مثل مبيانيا الدالة f المعرفة على المجال $[-6, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = \sqrt{x+6}$.

2)- نعتبر المجال $I = [0, 3]$.

أ- بين أن $u_0 \in I$ و أن $f(I) \subset I$.

ب- بين أن المتتالية $(u_n)_n$ تزايدية و مكبورة ثم استنتج أنها متقاربة.

3)- حل في المجال I المعادلة $f(x) = x$ ثم استنتج نهاية المتتالية $(u_n)_n$.

تمرين11

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_n$ المعرفة بحدها الأول $u_0 = 2$ والعلاقة $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$.

I)- دراسة المتتالية $(u_n)_n$

1)-أ- أحسب : u_1 و u_2.

ب- بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq \sqrt{2}$.

2)-أ-بين أن المتتالية $(u_n)_n$ تناقصية قطعا ، ثم استنتج أن $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2$.

3)-أ- أثبت المتساوية التالية: $\forall n \in IN, u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{u_n}\right)\left(u_n - \sqrt{2}\right)$.

ب-استنتج المتفاوتتين التاليتين: $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right)$.

$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^n}\left(u_0 - \sqrt{2}\right)$.

ج- أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$.

II)- دراسة المتتالية $(u_n)_n$ باستعمال الدالة

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

1)- بين أن الدالة f تزايدية قطعا على المجال $\left[\sqrt{2}, +\infty\right[$

2)- حل في المجال $]0, +\infty[$ المعادلة : $f(x) = x$.

3)- نعتبر المجال : $I = \left]\sqrt{2}, 2\right]$.

أ- بين أن : $f(I) \subset I$.

ب- برهن بالترجع أن : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$.

ج- أدرس رتابة المتتالية $(u_n)_n$.

د- استنتج أن المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة ثم أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$.

ملاحظة : المتتالية $(u_n)_n$ هي متتالية أعداد جذرية تؤول إلى عدد غير جذري.

تمرين12

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{2+x^2}$.

لتكن $(u_n)_n$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $u_0 = 1$ و $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$

I) دراسة المتتالية $(u_n)_n$:

2) - أ - بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ و أن : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_n}{u_{n+1}} > 1$.

ب - استنتج رتابة المتتالية $(u_n)_n$.

ج – استنتج أن المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة .

3) - أ – بين أن $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < \frac{1}{2} u_n$.

ب – أثبت أن : $\forall n \in IN, u_n \leq \frac{1}{2^n}$ واستنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$.

II) استعمال الدالة f لدراسة المتتالية $(u_n)_n$

ليكن I مجال $\mathbb{R}$ حيث : $I = \left]0, \sqrt{2}\right[$.

1) - حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $f(x) = x$.

2) - أ – أحسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ب –بين أن f تزايدية قطعا على $\left[0, \sqrt{2}\right]$ و تناقصية قطعا على $\left[\sqrt{2}, +\infty\right[$.

ج – أعط جدول تغيرات f على $\mathbb{R}$ (لاحظ أن f دالة فردية).

3) - أ – بين أن : $f(I) \subset I$.

ب – بين بالترجع أن : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$.

ج – باستعمال تغيرات الدالة f أثبت أن $(u_n)_n$ تناقصية قطعا ثم استنتج أن $(u_n)_n$ متقاربة .

د – أحسب نهاية المتتالية $(u_n)_n$ عندما يؤول n إلى $+\infty$.

4) - لتكن g قصور الدالة f على المجال I.

أ – بين أن الدالة g تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يجب تحديده .

ب – حدد الدالة العكسية g^{-1} للدالة g.