الأولى ج م ع	الجداء السلمي ملخص الدرس	ح.بوعيون

I) تعريف

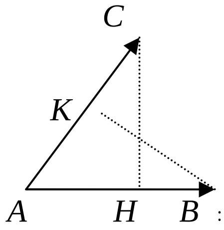
1) لتكن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متجهتين غير منعدمتين .

ليكن H المسقط العمودي لـــ C على (AB)

و K المسقط العمودي لـــ B على (AC)

نسمي الجداء السلمي للمتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

العدد الحقيقي الذي نرمز له بـــ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ والمعرف بما يلي :



$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB}.\overline{AH}$$
$$= \overline{AC}.\overline{AK}$$
$$= AB.AC.\cos(B\hat{A}C)$$

2) إذا كانت إحدى المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ أو $\overrightarrow{AC}$ فإن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

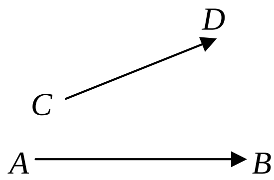
II) خاصيات

1) لتكن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متجهتين غير منعدمتين .

ليكن C' المسقط العمودي لـــ C على (AB)

ليكن D' المسقط العمودي لـــ D على (AB)

لدينا $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overline{AB}.\overline{C'D'}$



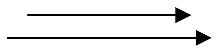
ملاحظة :

من اجل حساب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ نسقط إحدى المتجهتين على الأخرى ونمر من المتجهات إلى القياس الجبري ،مع الإحتفاظ بالنقط التي أسقطنا عليها ، ونعوض النقط التي أسقطناها بمساقطها .

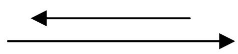
2) a) نرمز لـــ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}$ بالرمز $\overrightarrow{AB}^2$ ويسمى المربع السلمي .

b) لدينا $\overrightarrow{AB}^2 = AB^2$

3) a) إذا كانت التجهتان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مستقيميتين ولهما نفس المنحى فإن :



$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = AB.CD$$



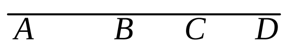
b) إذا كانت التجهتان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مستقيميتين ولهما منحيان متعاكسان فإن :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = -AB.CD$$

4) a) نقول إن المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متعامدتان إذا وفقط إذا كان كن المستقمان (AB) و (CD) متعامدين . ونكتب $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$

b) لدينا $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ تكافئ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$

5) إذا كانت النقط A و B و C و D مستقيمية فإن

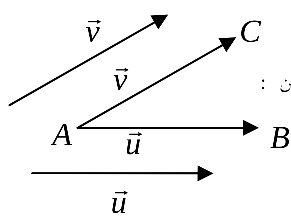


$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overline{AB}.\overline{CD}$$

6) a) لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين ولتكن A و B و C 3 نقط بحيث

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u} \ , \ \overrightarrow{AC} = \vec{v}$$

لدينا : $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$



b) لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين :

لدينا $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

c) $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$

d) إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين ولهما نفس المنحى فإن : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$

e) إذا كانت التجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين ولهما منحيان متعاكسان فإن :

$$\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$$

f) $\vec{u} \perp \vec{v}$ تكافئ $\vec{u}.\vec{v} = 0$

g)

(* $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

(* $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

(* $\vec{u}.(\vec{v}-\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} - \vec{u}.\vec{w}$

(* $(\alpha\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u}.\vec{v})$

(* $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$

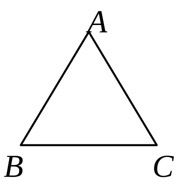
(* $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u}.\vec{v}$

(* $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

III) تطبيقات الجداء السلمي

1) علاقة الكاشي .

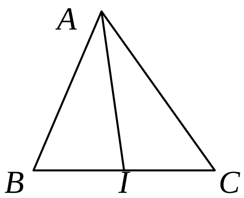
ليكن (ABC) مثلثا لدينا :



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos\hat{A}$$
$$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA.BC.\cos\hat{B}$$
$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA.CB.\cos\hat{C}$$

2) مبرهنة المتوسط

ليكن (ABC) مثلثا و I منتصف القطعة $[AB]$



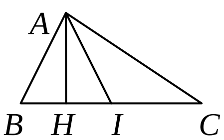
لدينا : $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \dfrac{BC^2}{2}$

أو $AI^2 = \dfrac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - \dfrac{BC^2}{2})$

3) العلاقات المترية في مثلث قائم الزاوية .

a) ليكن (ABC) مثلثا قائم الزاوية في A و A' منتصف $[BC]$ و H المسقط العمودي لـــ A على (BC) . لدينا :

(* $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (علاقة فتاغورس)



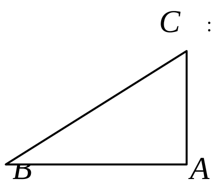
(* $BA^2 = \overline{BH}.\overline{BC} = BH.BC$

(* $CA^2 = \overline{CH}.\overline{CB} = CH.CB$

(* $AH^2 = -\overline{HB}.\overline{HC} = HB.HC$

(* $AA' = \dfrac{1}{2}BC$

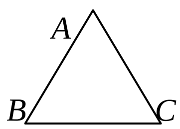
b) ليكن (ABC) مثلثا قائم الزاوية في A . لدينا :



$$\cos\hat{B} = \frac{BA}{BC} \qquad \cos\hat{B} = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan\hat{B} = \frac{AC}{AB}$$

c) ليكن (ABC) مثلثا . لدينا :



$$\frac{\sin\hat{A}}{BC} = \frac{\sin\hat{B}}{AC} = \frac{\sin\hat{C}}{AB}$$