

(I) التعداد

(1) رئيسي مجموعة

نسمي رئيسي مجموعة منتهية E عدد عناصرها ، ونرمز له ب $card(E)$

(2) عاملي عدد طبيعي

ليكن n عدد طبيعي . نسمي عاملي n ، العدد الذي نرمز له ب $n!$ والمعروف بما يلي :

$$n! = 1.2.3.....n \quad (*) \quad n \neq 0$$

$$0! = 1 \quad (*)$$

(3) مبدأ الجداء .

إذا كان علينا أن ننجز p اختيارا ، وكان لدينا :

$$n_1 \quad (*) \quad \text{طريقة للإختيار رقم 1 .}$$

$$n_2 \quad (*) \quad \text{طريقة للإختيار رقم 2 .}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$n_p \quad (*) \quad \text{طريقة للإختيار رقم } p \text{ .}$$

فإن عدد الطرق التي تتم بها هذه الأختيارات هو $n_1.n_2.....n_p$.

(4) الترتيبات - التبديلات - التاليفات

ليكن $E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ مجموعة مكونة من n عنصر . و $p \leq n$.

(a) نسمي ترتيبا لـ p عنصر من بين n عناصر E أو ترتيبا من الرتبة p لعناصر E

كل ترتيب لـ p عنصر مختلف من E . ونرمز لترتيب لـ (x_1, x_2, \dots, x_p)

(b) عدد هذه الترتيبات هو العدد الذي نرمز له بـ : A_n^p والمعروف بمايلي :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = \underbrace{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}_{n \text{ facteurs}}$$

(c) نسمي تبديلة لعناصر E كل ترتيب لـ n عنصر من بين n عناصر E

(d) عدد هذه التبديلات هو $A_n^n = n(n-1)(n-2)\dots 1 = n!$

(e) نسمي تاليفا لـ p عنصر من بين n عناصر E أو تاليفا من الرتبة p لعناصر E

كل جزئ مكون من p عنصر مختلف من E . ونرمز لتاليفا لـ $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$

(f) عدد هذه التاليفات هو العدد الذي نرمز له بـ : C_n^p والمعروف بمايلي :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}^{p \text{ facteurs}}}{p(p-1)(p-2)\dots 1}$$

(5) خاصيات

$$C_n^p = C_n^{n-p} \quad C_n^1 = C_n^{n-1} = n \quad C_n^0 = C_n^n = 1 \quad (\text{a})$$

$$C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k \quad \text{الصيغة الحدانية .} \quad (\text{b})$$

(c) ليكن E مجموعة مكونة من n عنصر . عدد أجزاء E هو 2^n .

(II) الإحتمال

(1) تعريف .

نعتبر المجموعة $\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ (كون الإمكانات)

نقول إننا قد عرفنا احتمالا على Ω إذا فقط إذا ربطنا كل عنصر a_i من Ω بعدد

حقيقي p_i بحيث : $0 \leq p_i \leq 1 \quad (*)$

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1 \quad (*)$$

ونكتب $p(a_i) = p_i$. الزوج (Ω, p) يسمى فضاء احتماليا منتهيا .

(2) احتمال حدث :

ليكن (Ω, p) يسمى فضاء احتماليا منتهيا و A حدثا .

احتمال الحدث A هو مجموع احتمالات الأحداث الابتدائية التي تكونه . يعني .

$$\text{إذا كان } A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \text{ فإن } p(A) = p(a_1) + p(a_2) + \dots + p(a_n)$$

(3) خاصيات ليكن (Ω, p) يسمى فضاء احتماليا منتهيا .

(a) ليكن A و B حدثين بحيث $A \cap B = \emptyset$ لدينا

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

(b) ليكن A و B حدثين . لدينا $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

(c) ليكن A حدثا و \bar{A} الحدث المضاد لـ A ، لدينا $p(A) = 1 - p(\bar{A})$

(d) ليكن A_1 و A_2 و \dots و A_n أحداثا منفصلة مثنى مثنى ، لدينا

$$p(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_n)$$

(4) فرضية تساوي الاحتمالات

ليكن (Ω, p) يسمى فضاء احتماليا منتهيا بحيث يكون لجميع الإمكانات نفس الإحتمال

$$(*) \quad \text{جميع الأحداث الابتدائية لها نفس الإحتمال هو } \frac{1}{card(\Omega)}$$

$$(*) \quad \text{ليكن } A \text{ حدثا . لدينا } p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

(ملاحظة : (a) إذا كان لجميع الأحداث الابتدائية نفس الإحتمال فإن

$$p(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

(b) إن فرضية تساوي الاحتمالات يمكن أن تظهر في النص بعبارة صريحة أو بطريقة غير مباشرة

كما يلي : (نرد غير مغشوش - قطعة نقود غير مغشوشة - كرات لا يمكن التمييز بينها باللمس)

(c) إذا كانت التجربة مغشوشة يجب أولا حساب احتمال الأحداث الابتدائية باستعمال المعطيات

حول عملية الغش واستعمال الخاصية : إذا كان $\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ فإن

$$p(A) = p(a_1) + p(a_2) + \dots + p(a_n)$$

مثال : نرمي نرد وجهه الستة مرقمة من 1 إلى 6 ومغشوش بحيث الأرقام الزوجية لها نفس

الإحتمال والأرقام الفردية لها نفس الإحتمال ، واحتمال رقم زوجي مضاعف احتمال رقم فردي

أحسب احتمال الحدث A "الحصول على رقم مضاعف لـ 3"

$$\text{الحل : لدينا } \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

(*) لنحسب احتمال الأحداث الابتدائية .

نضع $x = p(1) = p(3) = p(5)$ و $p(2) = p(4) = p(6) = 2x$ ، لدينا

$$p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 1$$

$$\text{يعني } x + 2x + x + 2x + x + 2x = 1 \text{ يعني } x = \frac{1}{9} \text{ إذن}$$

$$p(2) = p(4) = p(6) = \frac{2}{9} \text{ و } p(1) = p(3) = p(5) = \frac{1}{9}$$

$$(*) \quad \text{لدينا } A = \{3, 6\} \text{ إذن } p(A) = p(3) + p(6) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

(5) الإحتمال الشرطي :

ليكن A و B حدثين بحيث $p(A) \neq 0$ ،

$$E(X^2) = x_1^2 p(X = x_1) + x_2^2 p(X = x_2) + \dots + x_n^2 p(X = x_n)$$

$$x_1^2 \alpha_1 + x_2^2 \alpha_2 + \dots + x_n^2 \alpha_n$$

(5) الإنحراف الطرازي .

الإنحراف الطرازي للمتغير العشوائي X هو العدد الذي نرمز له بـ $\sigma(X)$ والمعروف بما يلي:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

(6) دالة التجزي

تسمى دالة التجزي للمتغير العشوائي X الدالة التي نرمز لها بـ F والمعرفة بما يلي:

$$(\forall x \in \mathbb{R}): F(x) = p(X < x)$$

ونقول إننا قد حددنا الدالة F إذا قمنا بحساب $F(x)$ لكل x من \mathbb{R} .

مثال: نعتبر الصندوق U نسحب تانيا 3 كرات من الصندوق. ليكن المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات البيضاء المحصل عليها.

(a) القيم التي يأخذها المتغير X هي:

$$X = 0 \quad (*) \quad \text{يعني الحصول على } \{3N\}$$

$$X = 1 \quad (*) \quad \text{يعني الحصول على } \{1B, 2N\}$$

$$X = 2 \quad (*) \quad \text{يعني الحصول على } \{2B, 1N\}$$

$$X = 3 \quad (*) \quad \text{يعني الحصول على } \{3B\}$$

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$$

(b) قانون احتمال X

$$p(X = 1) = \frac{C_3^1 C_4^2}{C_7^3} = \frac{18}{35} \quad (*) \quad p(X = 0) = \frac{C_4^3}{C_7^3} = \frac{4}{35} \quad (*)$$

$$p(X = 3) = \frac{C_3^3}{C_7^3} = \frac{1}{35} \quad (*) \quad p(X = 2) = \frac{C_3^2 C_4^1}{C_7^3} = \frac{12}{35} \quad (*)$$

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{1}{35}$

$$E(X) = 0 \cdot \frac{4}{35} + 1 \cdot \frac{18}{35} + 2 \cdot \frac{18}{35} + 3 \cdot \frac{1}{35} = \frac{49}{35} \quad (c)$$

$$E(X^2) = 0^2 \cdot \frac{4}{35} + 1^2 \cdot \frac{18}{35} + 2^2 \cdot \frac{18}{35} + 3^2 \cdot \frac{1}{35} = \frac{75}{35} \quad (d) \quad \text{لدينا}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{75}{35} - \left(\frac{49}{35}\right)^2 = \frac{224}{352} \quad \text{إذن}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{\sqrt{224}}{35} \quad (e) \quad \text{لدينا}$$

(f) دالة التجزي. لنحسب $F(x)$ لكل x من \mathbb{R} .

$$F(x) = p(X < x) = p(\emptyset) = 0 \quad \text{فإن } x \leq 0 \quad (*)$$

$$F(x) = p(X < x) = p(X = 0) = \frac{4}{35} \quad \text{فإن } 0 < x \leq 1 \quad (*)$$

$$(*) \quad \text{إذا كان } 1 < x \leq 2 \quad \text{فإن}$$

$$F(x) = p(X < x) = p(X = 0) + p(X = 1) = \frac{22}{35}$$

$$(*) \quad \text{إذا كان } 2 < x \leq 3 \quad \text{فإن}$$

$$F(x) = p(X < x) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) = \frac{34}{35}$$

$$(*) \quad \text{إذا كان } 3 < x \quad \text{فإن}$$

$$F(x) = p(X < x) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3) = 1$$

$$p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \quad \text{احتمال الحدث } B \text{ علما أن الحدث } A \text{ محقق هو}$$

(6) صيغة الإحتمالات المركبة

ليكن A و B حدثين بحيث $p(A) \neq 0$,

$$p(A \cap B) = p(A)p(B/A)$$

(7) صيغة الإحتمالات الكلية

(a) نقول إن الأحداث A_1 و A_2 و \dots و A_n تكون تجزيتا لـ Ω إذا فقط إذا كان

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega \quad (*) \quad (\forall i \neq j): A_i \cap A_j = \emptyset \quad (*)$$

(b) تكون الأحداث A_1 و A_2 و \dots و A_n تجزيتا لـ Ω إذا فقط إذا كانت منفصلة متنى متنى وتكون هي الأحداث الممكنة.

(c) صيغة الإحتمالات الكلية

ليكن A_1 و A_2 و \dots و A_n أحداثا تكون تجزيتا لـ Ω . لكل حدثا B لدينا:

$$p(B) = p(A_1)p(B/A_1) + \dots + p(A_n)p(B/A_n)$$

(8) الإستقلالية

(a) نقول إن الحدثين A و B مستقلان إذا فقط إذا كان

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

(b) يكون الحدثان A و B مستقلين إذا فقط إذا كان $p(B/A) = p(B)$ و

$$p(A/B) = p(A) \quad \text{يعني إذا كان تحقق أحدهما لا يؤثر على الآخر.}$$

(c) نعتبر تجربة مكونة من n اختار مستقلة متنى متنى.

ليكن A حدثا احتمال تحقيقه في اختبار واحد هو $p(A) = p$

وليكن B الحدث: "الحدث A يتحقق k مرة بالضبط خلال n اختبار"

$$\text{لدينا: } p(B) = C_n^k (p(A))^k (1 - p(A))^{n-k}$$

ملاحظة: بصفة عامة من أجل حساب احتمال تتبع مايلي:

$$(a) \quad \text{إذا كان لدينا السحب التآني أو الإختيار التآني نستعمل } C_n^p \text{ و } p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

(b) إذا كانت تجربة مكونة من عدة اختبارات، فنكك هذه التجربة إلى عدة اختبارات يكون فيها إختيار التآني حتى نتجنب استعمال الترتيبات والتطبيقات. ونرمز لكل إمكانية بـ:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{حيث } x_i \text{ نتيجة التجربة رقم } i.$$

(III) المتغير العشوائي .

(1) نسمي متغير عشوائي كل تطبيق X يربط كل إمكانية من Ω بعدد حقيقي، ونرمز للقيم التي يأخذها المتغير X بـ $X(\Omega)$.

(2) ليكن X متغير عشوائي بحيث $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

نقل إننا قد حددنا قانون احتمال X ، إذا قمنا بحساب $p(X = x_i)$ لكل

$i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ونلخص هذه النتائج في جدول كما يلي:

x_i	x_1	x_2	x_n
$p(X = x_i)$	α_1	α_2	α_n

(3) الأمل الرياضي .

الأمل الرياضي لمتغير عشوائي X هو العدد الذي نرمز له بـ $E(X)$ والمعروف بما يلي:

$$E(X) = x_1 p(X = x_1) + x_2 p(X = x_2) + \dots + x_n p(X = x_n)$$

$$= x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_n \alpha_n$$

(4) المغايرة

المغايرة لمتغير عشوائي X هو العدد الذي نرمز له بـ $V(X)$ والمعروف بما يلي:

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \quad \text{حيث}$$

