بســــم الله الرحمـــــن الرحــــيم

الأعداد الأوليـة

جلال الحاج عبد

الأعداد الأولية Prime Numbers

كل عدد طبيعي لا يقبل القسمة إلا على نفسه و الواحد هو عدد أولي ، تشكل مجموعة الأعداد هذه مجموعة الأعداد الأولية . يستثنى من هذا التعريف العدد واحد أي الواحد ليس عدد أولي . تبدأ الأعداد الأولية من 2 و لا تنتهي بعدد أولي معين . هي مجموعة غير متناهية .

2 , 3 , 5 , 7 ,11 , 13 , 17 , 19 , 23 , 29 , 31 , 37 , 41 , ...

كما تلاحظون تبدأ الأعداد الأولية بعدد 2 ، و هو العدد الزوجي الوحيد في مجموعة الأعداد الأولية .

الأعداد الأولية تاريخها عريق ، و يبدأ مع بدآية إستعمال الإنسان للأعداد . بدأت النظرة الرياضياتية للأعداد الأولية في اليونان القديمة تزامناً مع تطور الحساب و الهندسة ، و تعتبر مطالعات إقليدس على الأعداد الأولية من أهم المصادر ، و برهانه على عدم إنتهائها من البراهين العظيمة في تاريخ الرياضيات ، نظراً لزمانه !

شغلت الأعداد الأولية ذهن الكثير من العلماء ، و كانت و لا زالت تدعوا الإنسان لمبارزتها لكشف أكبر عدد أولي ، أو رابطة أو قانون ينتج أعداد أولية ، أو قانوناً أو رابطة أو طريقة تؤيد أوليّة عدد أو أعداد معطاة . حتى جاء الحاسوب و أنهى جزءاً من هذا النزاع ، و أصبحت نظرية الأعداد الأولية بفضل الكامبيوتر شبه محلولة . نعم شبه محلولة و ليست محلولة بالإطلاق ، فعلى رغم القدرات الحسابية للكامبيوترات الحديثة ، فإلى اليوم أكبر عدد أولي توصل إليه العلماء في جامعة كاليفورنيا يتكون من 13 مليون رقم و هو أحد أعداد مرسين[1] $(M\,(43112609) = 2^{43112609} - 1)$.

1- Mersenne numbers

رغم عظمة هذا العدد لكنه لا شئ أمام سلسلة لا متناهية من الأعداد .

في تاريخ الرياضيات كثيرين هم من سعوا للوصول الى قانون أو رابطة عامة تعطي أعدادا أولية ، لكن سرعان ما أن توصلوا هم أو غيرهم لعدد يبطل عمومية إكتشافهم ، من بين الذين وصلوا لكهذه الرابطة هو البير دي فيرما ، توصل لهذه الرابطة :

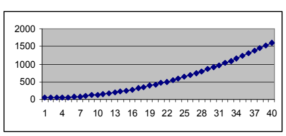
$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

لكن سرعان ما أبطل عمومية هذه الرابطة عالم الرياضيات السويسري أويلر ، بكشفه إن هذه الرابطة بإزاء $n = 5$ ليست عدداً أولياً . و الى اليوم يوجد فقط 12 عدد أولي من أعداد فيرما الأولية .

بعض الروابط الأخرى :

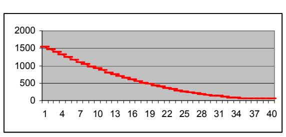
تعطي هذه الرابطة أعداد أولية الى $n = 1, 2, 3, \cdots, 39$ $\qquad P(n) = n^2 - n + 41$

لأن $P(40) = 40^2$



تعطي هذه الرابطة أعداد أولية الى $n = 1, 2, 3, \cdots, 79$ $\qquad P(n) = n^2 - 79n + 1601$

لأن $P(80) = 41^2$



الأعداد الأوليه الناتجة من هذه الرابطة $M(n) = 2^n - 1$ تعرف بأعداد مرسين

ليست هذه الرابطة عامة للأعداد الأولية لكن العدد الأولي الناتج من هذه الرابطة يعرف بعدد مرسين ، و كما لاحظتم عدد مرسين $M(43112609)$.

غربال إراتوستين Sieve of Eratosthens

من أقدم الطرق للحصول على الأعداد الأوليه من الواحد الى عدد ما[1] . و الطريقة هي أن تقوم بكتابة الأعداد من الواحد الى العدد المُعطى ، ثم تحذف مضاعفات الأعداد الأولية ، و تبدأ من مضاعفات 2 ثم 3 ثم 5 و هكذا . لمعرفة العدد الطبيعي N أولي أم لا ، نقسمه على الأعداد الطبيعية الأصغر من $\sqrt{N}$ ، إذا لم يقبل القسمة على هذه الأعداد فهو أولي .

مثال غربال الأعداد الى 100

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

الأعداد الأوليه المزدوجه

عبارة عن عددين أوليين الرابطة بينهما هي ، P و $P+2$ مثلاً :

$$(3,5),(5,7),(11,13),(17,19)\cdots$$

يُحدس إن عدد هذه الأزواج من الأعداد الأولية المزدوجة لا متناهي ، لكن لا يوجد برهان على هذا الحدس .

1- الأعداد الصغيرة التي تقلّ عن 10^6

الحدسيات في نظرية الأعداد الأولية

يوجد في الرياضيات حدسيات عديدة ، و بالأخص في نظرية الأعداد و في نظرية الأعداد الأولية بالتحديد . أكثر نسبة للحدسات هي حول الأعداد الأولية و خواصها . الحدس هو نتيجة أو قضية غير مبرّهن عليها تنتج عن مشاهدة نتائج عدة معطيات . أشهر الحدسيات :

حدسية ليجاندر Legendre's Conjecture

يوجد عدد أولي بين كل n^2 و $(n+1)^2$

حدسية كرامر Cramer's Conjecture

إذا كان P_n و P_{n+1} عددان أوليّان متتاليان بحيث $P_{n+1} > P_n$ في هذه الحالة

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+1}-P_n}{(\ln P_n)^2} = 1$$

حدسية غولدباخ Goldbach's Conjecture

لغولدباخ حدسيتان ، الحدسية القوية و الحدسية الضعيفة

حدسية *غودلباخ القوية* : كل عدد صحيح زوجي ، هو مجموع عددين أوليين

مثال : $8=3+5$ و $12=5+7$

حدسية *غولدباخ الضعيفة* : كل عدد صحيح فردي أكبر من 5 ، هو مجموع ثلاثة أعداد أولية (تكرار العدد الأولي مجاز)

مثال : $7=2+2+3$ و $11=3+3+5$ و $15=3+5+7$

برهان إقليدس على إن الأعداد الأولية لا نهائية

قبل البدأ ببرهان إقليدس على لا نهائية الأعداد الأولية ، ننوه بأن كل عدد (غير أولي) هو عبارة عن جداء أعداد أوليه أو حاصل ضرب معامله الأولية ، إي : $221=13\times17$

$(2\times3\times5\times7\times11\times13)+1=30031=59\times509$

مبرهنة إقليدس : الأعداد الأولية لا نهائية

البرهان :

نفرض إن الأعداد الأولية متناهية و هي $P_1,P_2,P_3,P_4,\cdots P_n$

حاصل ضرب هذه الأعداد هو:

$$P=P_1\times P_2\times P_3\times P_4\times\cdots P_n$$

نفرض إن : $q=P+1$ إذن : $q>P$ في هذه الحالة :

q إما عدد أولي و إما غير أولي :

- q عدد أولي ، و بما أن $q>P$ بالنتيجة $q>P_n$ و هذا يعني إن الأعداد الأولية لا نهائية و يوجد عدد أولي أكبر من الأعداد الأولية المفروضة .

- q عدد غير أولي ، بما إن q غير أولي لذلك هو عبارة عن حاصل ضرب معامل أولية أو جداء أعداد أولية ، بعض معامله الأولية أكبر من P_n ، بالنتيجه الأعداد الأولية لا نهائية .

جداء الأعداد الأولية

المبرهنة الأساسية في الحساب هي ، كل عدد طبيعي عبارة عن جداء أعداد أولية .

$10200=2^3\times3\times5^2\times17$

$16549=13\times19\times67$

برهان أويلر على إن الأعداد الأولية لا نهائية

قبل بدأ البرهان نشرح مجموع المتواليه الهندسيه هذه :

$$a+aq+aq^2+aq^3+\cdots+aq^{n-1}=\sum_{n=1}^{n} aq^{n-1}=a\frac{1-q^{n-1}}{1-q}$$

إذا كانت $|q|<1$ و $a=1$ في هذه الحالة المجموع هذا يساوي :

$$1+q+q^2+q^3+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty} q^k=\frac{1}{1-q}$$

البرهان

إذا كانت p عدد أولي في هذه الحالة $\frac{1}{p}<1$ إذن :

$$1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p^k}=\frac{1}{1-\frac{1}{p}}$$

نفرض مجموعة الأعداد الأولية نهائية أي متناهية ، و جميع الأعداد الأولية هي : $(p_1,p_2,p_3,p_4,\dots,p_n)$ حاصل ضرب هذه المتواليات الهندسية للأعداد الأولية يساوي :

$$(1+\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_1^2}+\frac{1}{p_1^3}+\cdots)\times(1+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_2^2}+\frac{1}{p_2^3}+\cdots)\times\cdots\times(1+\frac{1}{p_n}+\frac{1}{p_n^2}+\frac{1}{p_n^3}+\cdots)=\prod_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p_i^k}$$

بما أن :

$$\prod_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p_i^k}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \qquad \mathrm{I}$$

كذلك :

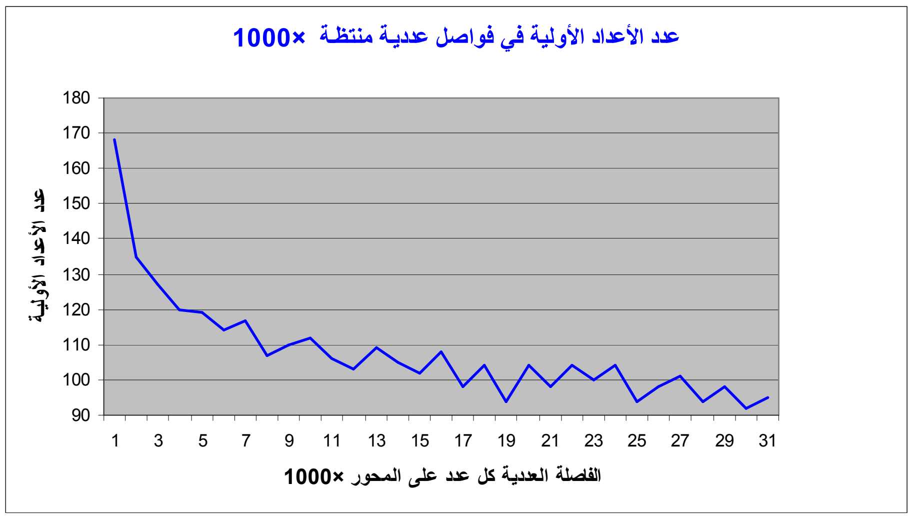
$$\prod_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p_i^k}=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-\frac{1}{p_i}} \qquad \mathrm{II}$$

الرابطة I هي رابطة تباعدية أي ليس لها نهاية (متسلسلة توافيقية) ، بينما الرابطة II تقاربية أي لها نهاية لأننا فرضنا الأعداد الأولية نهائية ، و هذا تناقض . إذن فرض الأعداد الأولية نهائية غير صادق بالنتيجة هي لا نهائية .

عدد الأعداد الأولية

المطلوب تعيّن عدد الأعداد الأولية في فاصلة عددية منتظمة ، مثلاً عدد الأعداد الأولية من الواحد الى 1000 ، أو عدد الأعداد الأولية من 2500 الى 3500 و هكذا .

From	To	عدد الأعداد الأولية
1	1000	168
1000	2000	135
2000	3000	127
3000	4000	120
4000	5000	119
5000	6000	114
6000	7000	117
7000	8000	107
8000	9000	110
9000	10000	112
10000	11000	106
11000	12000	103
12000	13000	109
13000	14000	105
14000	15000	102
15000	16000	108
16000	17000	98
17000	18000	104
18000	19000	94
19000	20000	104
20000	21000	98
21000	22000	104
22000	23000	100
23000	24000	104
24000	25000	94
25000	26000	98
26000	27000	101
27000	28000	94
28000	29000	98
29000	30000	92
30000	31000	95



يعتبر قانون غاوس من أهم الروابط التقريبية التي تعطي عدد الأعداد الأولية التي هي أصغر من N ، الرابطة هي :

$$\pi(N) \approx \frac{N}{\ln N}$$

$\pi(N)$ عدد الأعداد الأولية

كذلك تكتب بهذه الصورة :

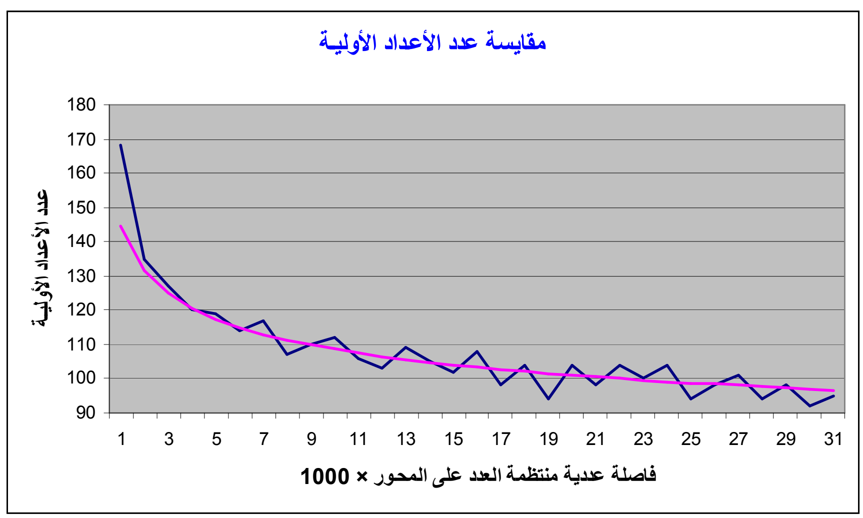
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi(n)}{\frac{n}{\ln n}}=1$$

إذا أردنا أن نعيّن عدد تقريبي للأعداد الأولية في فاصلة عددية منتظمة من M الى N يمكن الإستفادة من هذه الرابطة :

$$\pi(n)\approx\frac{N-M}{\ln(N-M)} \qquad N>M$$

لاحظ عدد الأعداد الأولية في كل من هذه الفواصل العددية و عدد الأعداد الأولية من الرابطة أعلاه . كذلك المنحنيان على الإحداثي :

From	To	عدد الأعداد الأولية	(N-M)/ln(N-M)
1	1000	168	144,6
1000	2000	135	131,6
2000	3000	127	124,9
3000	4000	120	120,6
4000	5000	119	117,4
5000	6000	114	114,9
6000	7000	117	112,9
7000	8000	107	111,3
8000	9000	110	109,8
9000	10000	112	108,6
10000	11000	106	107,5
11000	12000	103	106,5
12000	13000	109	105,6
13000	14000	105	104,7
14000	15000	102	104
15000	16000	108	103,3
16000	17000	98	102,7
17000	18000	104	102,1
18000	19000	94	101,5
19000	20000	104	101
20000	21000	98	100,5
21000	22000	104	100
22000	23000	100	99,6
23000	24000	104	99,1
24000	25000	94	98,7
25000	26000	98	98,4
26000	27000	101	98
27000	28000	94	97,7
28000	29000	98	97,3
29000	30000	92	97
30000	31000	95	96,7



عدد الأعداد الأولية في هذه الفواصل

عدد الأعداد الأولية من الرابطة في هذه الفواصل

مواضيع من نظرية الأعداد

الحساب المقاسي : modular arithmetic

إذا كان باقي تقسيم العدد a على العدد n هو العدد b في هذه الحالة يمكن كتابة العدد a بهذه الطريقة :

$$a = n \times r + b \Rightarrow a \equiv b(\mathrm{mod}\, n)$$

هذا التعبير $a \equiv b(\mathrm{mod}\, n)$ هو جوهر العمليات الحسابية في الحساب المقاسي .

مثال :

$$11 \equiv 3 \times 2 + 5 \Rightarrow 11 \equiv 5(\mathrm{mod}\, 3)$$

في بحث لي بعنوان **الحساب المقاسي** شرحت فيه هذا الحساب .

مبرّهنة فيرما الصغيرة : Fermat's little theorem

إذا كانت p عدد أولي ، و p و a لا يقبلان القسمة على بعضهما في هذه الحالة :

$$a^{p-1} \equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$$

تعرف هذه بمبرّهنة فيرما الصغيرة ، لتميّزها عن مبرّهنته الأخيرة .

مثال :

$$p = 13 \quad \text{و} \quad a = 2 \quad \Longrightarrow \quad 2^{12} \equiv 1(\mathrm{mod}\, 13)$$

أي :

$$2^{12} = 4096 = 13 \times 315 + 1$$

دالة φ (فاي) أويلر : Euler phi function

عدد الأعداد الصحيحة الموجبه بين (0) و (n-1) و التي هي الى n أولية نسبياً[1] ، تعرف بدالة فاي أويلر أو توتيان[2] و يرمز لها $\varphi(n)$. إذن $\varphi(12) = 4$ لأن 5 و 7 و 11

1- coprime أو relatively prime مثل 8 أولية نسبياً الى 21 لأن ليس بينهما معامل مشتركة ، بينما 8 ليست أولية نسبياً الى 26 لأن بينهما معمل مشترك هو 2 .

2- totient

بالنسبة الى 12 أولية نسبياً بأنضمام الواحد تصبح 4 . كذلك $\varphi(6)=2$ و $\varphi(5)=4$

و $\varphi(7)=6$ و هكذا

إذا كانت n عدد أولي في هذه الحالة :

$$\varphi(p)=p-1$$

يمكن ملاحظة صحة هذه الرابطة في الأمثلة السابقة .

مبرهنة أويلر :

إذا كانت a و n لا يقبلان القسمة على بعضهما في هذه الحالة :

$$a^{\varphi(n)}=1(\bmod n)$$

مثال :

$$a=3 \text{ و } n=5\Rightarrow\varphi(n)=4 \Longrightarrow 3^4=1(\bmod 5)$$

أي :

$$3^4=81=5\times16+1$$

جدول لبعض مقادير φ

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
φ(n)	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4	12	6	8	8	16	6	18	8	12	10	22

مبرهنة ويلسون : Wilson's theorem

إذا كانت p عدد أولي إذن :

! علامت مضروب أو فاكتوريل

$$(p-1)!=-1(\bmod p)$$

مثال :

$$(7-1)!=-1(\bmod 7)$$

أي :

$$(7-1)!=6!=1\times2\times3\times4\times5\times6=720=7\times103-1$$

الفجوة بين الأعداد الأولية

لعدم وجود رابطة و قانون عام بين الأعداد الأولية ، توجد فجوة عددية غير منتظمة بين كل عددين أوليين متتالين . لاحظ هذه الفجوة بين هذه الأعداد الأولية التي تملأها (*) (هذا الجدول من برنامج كتبته بالفيجوال بيسك تجدونه على الموقع)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
*	2	3	*	5	*	7	*	*	*	11	*	13	*	*	*	17	*	19
*	*	*	23	*	*	*	*	*	29	*	31	*	*	*	*	*	37	*
*	*	41	*	43	*	*	*	47	*	*	*	*	*	53	*	*	*	*
*	59	*	61	*	*	*	*	*	67	*	*	*	71	*	73	*	*	*
*	*	79	*	*	*	83	*	*	*	*	*	89	*	*	*	*	*	*
*	97	*	*	*	101	*	103	*	*	*	107	*	109	*	*	*	113	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	127	*	*	*	131	*	*
*	*	*	137	*	139	*	*	*	*	*	*	*	*	*	149	*	151	*
*	*	*	*	157	*	*	*	*	*	163	*	*	*	167	*	*	*	*
*	173	*	*	*	*	*	179	*	181	*	*	*	*	*	*	*	*	*
191	*	193	*	*	*	197	*	199	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	211	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	223	*	*	*	227	*
229	*	*	*	233	*	*	*	*	*	239	*	241	*	*	*	*	*	*
*	*	*	251	*	*	*	*	*	257	*	*	*	*	*	263	*	*	*
*	*	269	*	271	*	*	*	*	*	277	*	*	*	281	*	283	*	*
*	*	*	*	*	*	*	293	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	307	*	*	*	311	*	313	*	*	*	317	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	331	*	*	*	*	*	337	*	*	*	*	*
*	*	*	*	347	*	349	*	*	*	353	*	*	*	*	*	359	*	*
*	*	*	*	*	367	*	*	*	*	*	373	*	*	*	*	*	379	*
*	*	383	*	*	*	*	*	389	*	*	*	*	*	*	*	397	*	*
*	401	*	*	*	*	*	*	*	409	*	*	*	*	*	*	*	*	*
419	*	421	*	*	*	*	*	*	*	*	*	431	*	433	*	*	*	*
*	439	*	*	*	443	*	*	*	*	*	449	*	*	*	*	*	*	*
457	*	*	*	461	*	463	*	*	*	467	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	479	*	*	*	*	*	*	*	487	*	*	*	491	*	*	*
*	*	*	*	499	*	*	*	503	*	*	*	*	*	509	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	521	*	523	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	541	*	*	*	*	*	547	*	*	*	*
*	*	*	*	*	557	*	*	*	*	*	563	*	*	*	*	*	569	*
571	*	*	*	*	*	577	*	*	*	*	*	*	*	*	*	587	*	*
*	*	*	593	*	*	*	*	*	599	*	601	*	*	*	*	*	607	*
*	*	*	*	613	*	*	*	617	*	619	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	631	*	*	*	*	*	*	*	*	*	641	*	643	*	*	*
647	*	*	*	*	*	653	*	*	*	*	*	659	*	661	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	673	*	*	*	677	*	*	*	*	*	683	*
*	*	*	*	*	*	691	*	*	*	*	*	*	*	*	*	701	*	*
*	*	*	*	*	709	*	*	*	*	*	*	*	*	*	719	*	*	*
*	*	*	*	727	*	*	*	*	*	733	*	*	*	*	*	739	*	*
*	743	*	*	*	*	*	*	*	751	*	*	*	*	*	757	*	*	*
761	*	*	*	*	*	*	*	769	*	*	*	773	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	787	*	*	*	*	*	*	*	*	*	797	*

لاحظ هذه الفجوة بين الأعداد الأولية .

جميع الأعداد الأولية أكبر من 10 آحادها 1 ، 3 ، 7 ، 9 ، بهذا الترتيب الذي تلاحظونه .

1	2	3	4	5	6	7	8	9
*	2	3	*	5	*	7	*	*
11	*	13	*	*	*	17	*	19
*	*	23	*	*	*	*	*	29
31	*	*	*	*	*	37	*	*
41	*	43	*	*	*	47	*	*
*	*	53	*	*	*	*	*	59
61	*	*	*	*	*	67	*	*
71	*	73	*	*	*	*	*	79
*	*	83	*	*	*	*	*	89
*	*	*	*	*	*	97	*	*
101	*	103	*	*	*	107	*	109
*	*	113	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	127	*	*
131	*	*	*	*	*	137	*	139
*	*	*	*	*	*	*	*	149
151	*	*	*	*	*	157	*	*
*	*	163	*	*	*	167	*	*
*	*	173	*	*	*	*	*	179
181	*	*	*	*	*	*	*	*
191	*	193	*	*	*	197	*	199
*	*	*	*	*	*	*	*	*
211	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	223	*	*	*	227	*	229
*	*	233	*	*	*	*	*	239
241	*	*	*	*	*	*	*	*
251	*	*	*	*	*	257	*	*
*	*	263	*	*	*	*	*	269
271	*	*	*	*	*	277	*	*
281	*	283	*	*	*	*	*	*
*	*	293	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	307	*	*
311	*	313	*	*	*	317	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*
331	*	*	*	*	*	337	*	*
*	*	*	*	*	*	347	*	349
*	*	353	*	*	*	*	*	359
*	*	*	*	*	*	367	*	*
*	*	373	*	*	*	*	*	379
*	*	383	*	*	*	*	*	389
*	*	*	*	*	*	397	*	*
401	*	*	*	*	*	*	*	409
*	*	*	*	*	*	*	*	419
421	*	*	*	*	*	*	*	*
431	*	433	*	*	*	*	*	439
*	*	443	*	*	*	*	*	449
*	*	*	*	*	*	457	*	*
461	*	463	*	*	*	467	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	479
*	*	*	*	*	*	487	*	*
491	*	*	*	*	*	*	*	499

فوائد مطالعة الأعداد الأولية

لا تخلو مطالعة الأعداد لأولية من الفوائد فهي التي ساعدت على تطوير و إثراء نظرية الأعداد ، و تشكل أحد أهم مواضيع نظرية الأعداد .

لا تخلو الطبيعة من الأعداد الأولية و أهميتها فمثلاً عدد الأصابع على اليد خمسة أصابع ، نجم البحر له خمسة أذرع و غيرها من الظواهر الطبيعية التي هي خير دليل على أهمية هذه الأعداد .

في الهندسة رسم بعض المضلعات ذات عدد أولي من الأضلع ، بالفرجال و المسطرة هي الأصعب من بين سائر المضلعات . و أثارت إنتباه علماء الرياضيات و شكلت أحد محاور الرسم الهندسي ، لذلك يتجنب المهندسين قدر الإمكان في مشاريعهم الهندسية من بعض الأشكال الهندسية ذات الأعداد الأولية ، على سبيل المثال معظم النوافذ مربعة أو مستطيلة و نادراً ما نشاهد نافذة مثلثية أو خماسية الشكل .

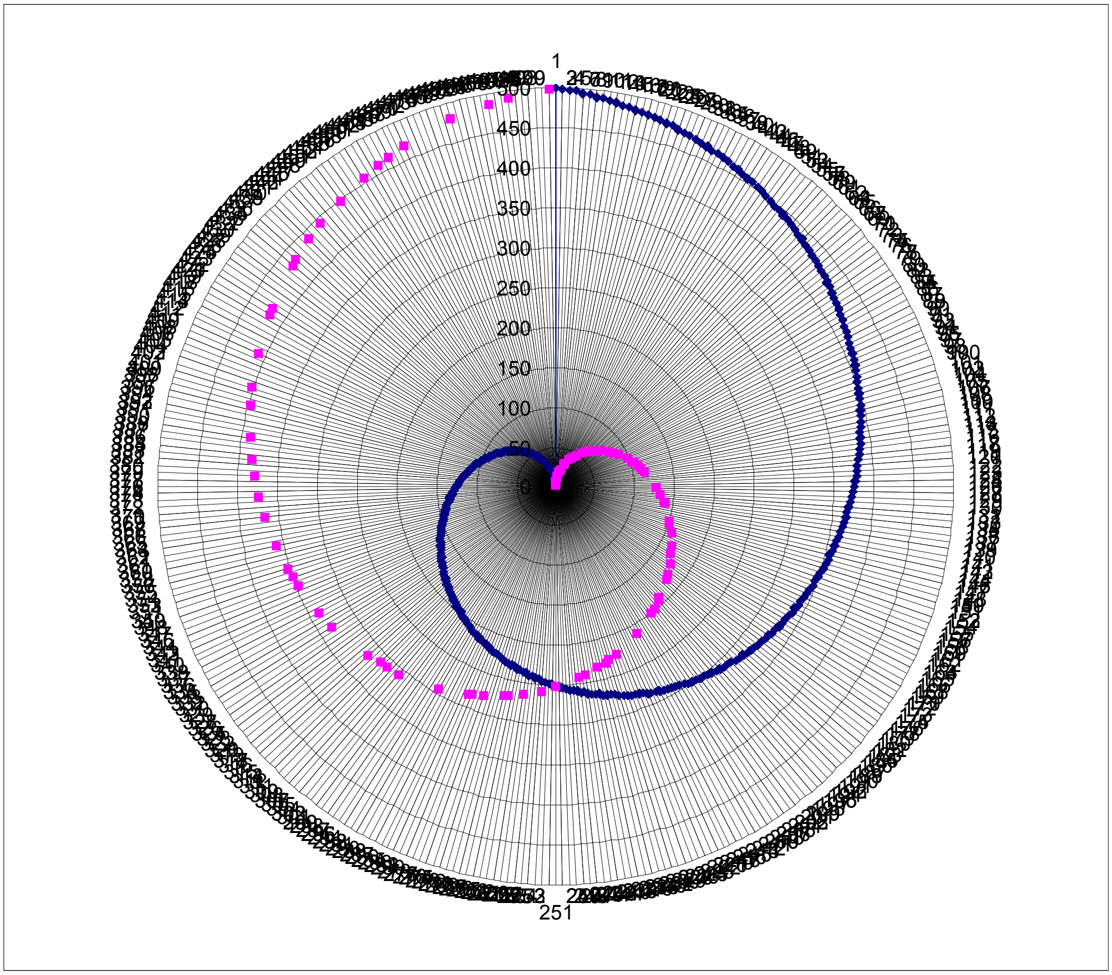
الفضاء الهندسي و المادي الذي نعيش فيه ذو ثلاثة أبعاد ، إضافة بعد آخر له يزيده تعقيداً.

لا يخلو الفن كالرسم و الموسيقى من الأعداد الأولية و أسرارها

الإستفادة من الأعداد الأولية في نظام تشفير الأنظمة و البيانات المعروف بنظام RSA

مقارنة بين توزيع الأعداد الأولية و توزيع الكتلة في الفضاء

إذا وزعنا الأعداد الأولية على إحداثي دائري شبيه برصد القطعات المتحركة في الفضاء بمساعدة الرادار ، نلاحظ نقاط عشوائية على مسير حلزوني أو لولبي كما هو في الشكل .

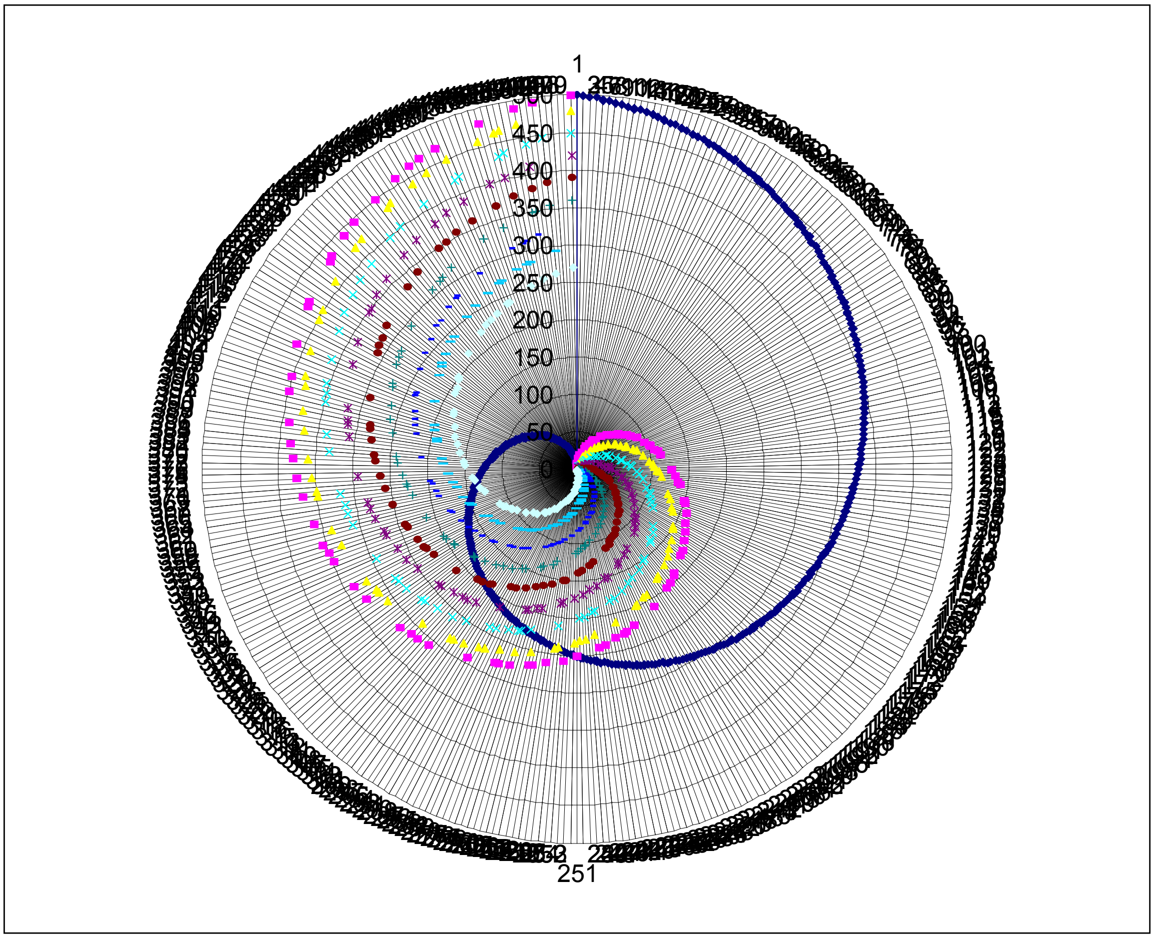


هذا الإحداثي الى الأعداد الأولية أقلّ من 500

اللولب الأزرق على اليمين هو للتسلسل الطبيعي للأعداد من الواحد الى 500

النقاط الوردية على اليسار هي الأعداد الأولية أقل من 500

في الصفحة القادمة شبيه هذا التوزيع للأعداد الأولية (من 1 الى 500) لكن كل لولب يبدأ من 2 و ينتهي بفاصلة 50 عدد عن الآخر .



لو تمعنا بهذا التوزيع للأعداد الأولية ، و هو توزيع عشوائى و قارناه بالصور هذه و هي توزيع الكواكب و السيارات و السحب في هذه المجرات . نلاحظ و كإنما توزيع الكتلة بالمجرات أشبه بالتوزيع العشوائي للأعداد الأولية على هذا الإحداثي . هذا مجرد نظر و لا يستند لأي دليل و مصدر.

قانون الأعداد الأولية العام !

السؤال هل سنتمكن من كشف قانون أو رابطة عامة ناتجها أعداد أولية ؟

المعادلة العامة للمعادلات الجبرية هي :

$$a_0+a_1x^1+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n=0$$

برّهنت نظرية الزمر على عدم إمكان حل هذه المعادلة لدرجة أكبر من 4 بنفس طريقة حل المعادلة الجبرية من الدرجة الثانية ، و الثالثة و الرابعة . أي لا يمكن حلّ المعادلة من الدرجة الخامسة فما فوق بالعمليات الأربعة و الجذور .

من هذه المقدمة بنظري : لا يمكن الوصول الى رابطة أو قانون رياضي عام بصيغة جبرية يكون الناتج فيه أعداد أولية فقط .

جدول الأعداد الأولية من 2 الى 2999

2	211	487	797	1103	1453	1787	2141	2521	2857
3	223	491	809	1109	1459	1789	2143	2531	2861
5	227	499	811	1117	1471	1801	2153	2539	2879
7	229	503	821	1123	1481	1811	2161	2543	2887
11	233	509	823	1129	1483	1823	2179	2549	2897
13	239	521	827	1151	1487	1831	2203	2551	2903
17	241	523	829	1153	1489	1847	2207	2557	2909
19	251	541	839	1163	1493	1861	2213	2579	2917
23	257	547	853	1171	1499	1867	2221	2591	2927
29	263	557	857	1181	1511	1871	2237	2593	2939
31	269	563	859	1187	1523	1873	2239	2609	2953
37	271	569	863	1193	1531	1877	2243	2617	2957
41	277	571	877	1201	1543	1879	2251	2621	2963
43	281	577	881	1213	1549	1889	2267	2633	2969
47	283	587	883	1217	1553	1901	2269	2647	2971
53	293	593	887	1223	1559	1907	2273	2657	2999
59	307	599	907	1229	1567	1913	2281	2659	
61	311	601	911	1231	1571	1931	2287	2663	
67	313	607	919	1237	1579	1933	2293	2671	
71	317	613	929	1249	1583	1949	2297	2677	
73	331	617	937	1259	1597	1951	2309	2683	
79	337	619	941	1277	1601	1973	2311	2687	
83	347	631	947	1279	1607	1979	2333	2689	
89	349	641	953	1283	1609	1987	2339	2693	
97	353	643	967	1289	1613	1993	2341	2699	
101	359	647	971	1291	1619	1997	2347	2707	
103	367	653	977	1297	1621	1999	2351	2711	
107	373	659	983	1301	1627	2003	2357	2713	
109	379	661	991	1303	1637	2011	2371	2719	
113	383	673	997	1307	1657	2017	2377	2729	
127	389	677	1009	1319	1663	2027	2381	2731	
131	397	683	1013	1321	1667	2029	2383	2741	
137	401	691	1019	1327	1669	2039	2389	2749	
139	409	701	1021	1361	1693	2053	2393	2753	
149	419	709	1031	1367	1697	2063	2399	2767	
151	421	719	1033	1373	1699	2069	2411	2777	
157	431	727	1039	1381	1709	2081	2417	2789	
163	433	733	1049	1399	1721	2083	2423	2791	
167	439	739	1051	1409	1723	2087	2437	2797	
173	443	743	1061	1423	1733	2089	2441	2801	
179	449	751	1063	1427	1741	2099	2447	2803	
181	457	757	1069	1429	1747	2111	2459	2819	
191	461	761	1087	1433	1753	2113	2467	2833	
193	463	769	1091	1439	1759	2129	2473	2837	
197	467	773	1093	1447	1777	2131	2477	2843	
199	479	787	1097	1451	1783	2137	2503	2851	

جلال الحاج عبد

خريف 2008

المصــــادر

Introduction to Number Theory, W. W. Adams and L. J. Goldstein, 1976

http://en.wikipedia.org/wiki/Fermat_prime

http://en.wikipedia.org/wiki/Prime_number

موقع جلال الحاج عبد

www.jalalalhajabed.com

البريد الألكتروني :

jalal.alhajabed@hotmail.com

jalal.alhajabed@yahoo.com