

(I) الحدوديات

1 تعريف

ليكن x من \mathbb{R} نعتبر التعبير

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

حيث a_n, \dots, a_1, a_0 أعداد حقيقية و $a_n \neq 0$

(* $P(x)$ أو P تسمى حدودية من الدرجة n ونكتب $\deg P = n$.

(* الأعداد a_n, \dots, a_1, a_0 تسمى معاملات الحدودية P .

(b) تكون حدودية منعقدة إذا فقط إذا كانت جميع معاملات منعقدة.

(c) الحدودية المنعقدة ليست لها درجة.

(d) تكون حدوديتان متساويتان إذا فقط إذا كانت معاملات الحدود

من نفس الدرجة متساوية.

(e) كل حدودية من الدرجة 1: $P(x) = ax + b$ تسمى حدانية.

(f) كل حدودية من الدرجة 2: $P(x) = ax^2 + bx + c$ تسمى ثلاثية

الحدود.

$$(a) \deg(P+Q) \leq \sup(\deg P, \deg Q) \quad (2)$$

$$(b) \deg(P-Q) \leq \sup(\deg P, \deg Q)$$

$$(c) \deg(P \cdot Q) = \deg P + \deg Q$$

3 القسمة على $x - \alpha$

(a) لتكن $P(x)$ حدودية. نقول إن العدد α جذر للحدودية P أو صفر

للحدودية P إذا فقط إذا كان $P(\alpha) = 0$

(b) لتكن $P(x)$ حدودية.

$P(x)$ تقبل القسمة على $x - \alpha$ إذا فقط إذا كان $P(\alpha) = 0$.

ملاحظة:

(a) إذا أردنا أن نتحقق هل $P(x)$ تقبل القسمة على $x - \alpha$ نقوم

بحساب $P(\alpha)$.

(* إذا كان $P(\alpha) = 0$ فإن $P(x)$ تقبل القسمة على $x - \alpha$.

(* إذا كان $P(\alpha) \neq 0$ فإن $P(x)$ لا تقبل القسمة على $x - \alpha$.

(b) إذا أردنا أن نتحقق هل $P(x)$ تقبل القسمة على $x + \alpha$ نقوم

بحساب $P(-\alpha)$.

(II) المعادلات والمتراجحات من الدرجة II.

1 حل المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$

نعتبر المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ (E) حيث $a \neq 0$

من أجل حل المعادلة (E) نقوم بحساب العدد $\Delta = b^2 - 4ac$

(* العدد Δ يسمى مميز المعادلة (E).

(* إذا كان $\Delta > 0$ فإن المعادلة (E) تقبل حلين مختلفين هما.

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

(* إذا كان $\Delta = 0$ فإن المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا $x = \frac{-b}{2a}$

(* إذا كان $\Delta < 0$ فإن المعادلة (E) لا تقبل أي حل.

ملاحظة:

(a) نعتبر المعادلة $ax^2 + 2bx + c = 0$ (E) (يعني $b = 2b'$)

نستعمل المميز المختصر Δ' عوض المميز Δ . ولدنا $\Delta' = b'^2 - ac$

(* إذا كان $\Delta' > 0$ فإن المعادلة (E) تقبل حلين مختلفين هما.

$$x_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} \quad x_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$$

(* إذا كان $\Delta' = 0$ فإن المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا $x = \frac{-b'}{a}$

(* إذا كان $\Delta' < 0$ فإن المعادلة (E) لا تقبل أي حل.

(b) إذا كان $\Delta = \alpha^2$ فإن المعادلة تقبل حلين

$$x_2 = \frac{-b + \alpha}{2a} \quad x_1 = \frac{-b - \alpha}{2a}$$

2 تعميل ثلاثية الحدود

نعتبر ثلاثية الحدود $P(x) = ax^2 + bx + c$ مع $a \neq 0$

من أجل تعميل $P(x)$ نقوم بحل المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ (E)

(* إذا كان $\Delta > 0$ فإن المعادلة E تقبل حلين x_1 و x_2 ويكون تعميل

$$P(x) \text{ هو } P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

(* إذا كان $\Delta = 0$ فإن المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا x_0 ويكون

$$\text{تعميل } P(x) \text{ هو } P(x) = a(x - x_0)^2$$

(* إذا كان $\Delta < 0$ فإن المعادلة (E) ليس لها حل والحدودية $P(x)$

ليس لها تعميل.

ملاحظة:

إذا كان $\Delta = 0$ فإن الحدودية $P(x)$ عبارة عن متطابقة هامة.

3 إشارة ثلاثية الحدود.

نعتبر الحدودية $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

من أجل دراسة إشارة $P(x)$ نقوم بحل

$$\text{المعادلة (E): } ax^2 + bx + c = 0$$

(* إذا كان $\Delta > 0$ فإن المعادلة (E) تقبل حلين مختلفين x_1 و x_2

وتكون إشارة $P(x)$ هي

x	x_1	x_2
$ax^2 + bx + c$	إشارة a	عكس إشارة a

(* إذا كان $\Delta = 0$ فإن المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا x_0 وتكون

إشارة $P(x)$ هي:

x	x_0
$ax^2 + bx + c$	إشارة a

(* إذا كان $\Delta < 0$ فإن المعادلة (E) ليس لها حل وتكون إشارة $P(x)$

هي:

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	إشارة a	

2) نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين.

نعتبر النظمة $(S) \begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ حيث الأعداد a و b و a' و b' ليست كلها منعدمة.

من أجل حل النظمة (S) نقوم بحساب المحددات التالية.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b \quad \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$$

(a) إذا كان $\Delta \neq 0$: فإن النظمة تقبل حلا وحيدا.

$$S = \{(x, y)\} \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \quad x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$$

(b) إذا كان $\Delta = 0$:

(* إذا كان $\Delta_x \neq 0$ أو $\Delta_y \neq 0$ فإن النظمة (S) ليس لها حل $s = \emptyset$

(* إذا كان $\Delta_x = 0$ و $\Delta_y = 0$ فإن النظمة (S) تكافئ إحدى المعادلتين.

3) إشارة $ax+by+c$

من أجل دراسة إشارة $ax+by+c$ نقوم بإنشاء المستقيم $(D): ax+by+c=0$

المستقيم (D) يقسم المستوى (P) إلى نصفي مستوى (P_1) و (P_2) . إذا عوضنا x و y بإحداثيات أي نقطة من (P_1) فإننا نحصل على إشارة ثابتة.

وإذا عوضنا x و y بإحداثيات أي نقطة من (P_2) فإننا نحصل على إشارة عكس الإشارة السابقة. ولمعرفة هذه الإشارة نعوض x و y بإحداثيات نقطة من (P_1) أو (P_2) نأخذ عادة إحداثيات θ هي $x=0$ و $y=0$.

4) مجموع وجداء جذري معادلة من الدرجة II.

(a) نعتبر المعادلة $(E): ax^2+bx+c=0$

(* إذا أردنا أن نبين أن المعادلة (E) تقبل حلين نقوم بحساب Δ ونجد $\Delta \geq 0$.

(* يمكن حساب مجموع وجداء هاذين الحلين بدون حل المعادلة

$$\begin{cases} x_1+x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

باستعمال الصيغ التالية

(b) إذا أردنا تحديد معادلة من الدرجة II يكون α و β حلين لها.

نقوم بحساب $\alpha+\beta$ و $\alpha\beta$ نجد $\alpha+\beta=S$ و $\alpha\beta=P$

وتكون هذه المعادلة هي $x^2-Sx+P=0$

(c) إذا أردنا حل النظمة $\begin{cases} x+y=S \\ x \cdot y=P \end{cases}$ نقوم بحل

$$t^2-St+P=0$$

إذا كان x_1 و x_2 هما الحلين فإن $\begin{cases} x \equiv x_1 \\ y = x_2 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x = x_2 \\ y = x_1 \end{cases}$

$$S = \{(x_1, x_2), (x_2, x_1)\}$$

ملاحظة:

(1) ليكن α و β حلي المعادلة $ax^2+bx+c=0$.

$$\begin{cases} \alpha+\beta = -\frac{b}{a} \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} \end{cases}$$

نعلم أن

إذا أردنا حساب حد يحتوي على α و β

نحاول إظهار $\alpha+\beta$ و $\alpha\beta$.

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta \quad (*)$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta)$$

$$= (\alpha+\beta)[(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta + \alpha\beta] \quad (*)$$

$$= (\alpha+\beta)[(\alpha+\beta)^2 - \alpha\beta]$$

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2} \quad (*)$$

(2) ليكن x_1 و x_2 حلي معادلة من الدرجة الثانية. من أجل دراسة

إشارة x_1 و x_2 نقوم بحساب x_1+x_2 و $x_1 \cdot x_2$.

(* إذا كان $x_1 x_2 < 0$ فإن أحد العدد x_1 و x_2 موجب والآخر سالب.

(* إذا كان $x_1 x_2 > 0$ فإن x_1 و x_2 لهما نفس الإشارة وهي إشارة x_1+x_2 .

III) النظمات الخطية

1) المعادلات من الدرجة I بمجهولين:

نعتبر المعادلة $(1) ax+by+c=0$ حيث أحد العددين a أو b غير منعدم. من أجل حل المعادلة (1) نحسب x بدلالة y إذا كان $a \neq 0$ أو نحسب y بدلالة x إذا كان $b \neq 0$. مثلا إذا كان $a \neq 0$

$$S = \left\{ \left(\frac{-by-c}{a}, y \right) / y \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{إذن } x = \frac{-by-c}{a}$$

