Université My Ismail
ENSAM-Meknès

21 Juillet 2007

Concours d'accès en Première année
Epreuve de Mathématiques
Séries Sciences Expérimentales et Techniques

Durée 3 heures et 30 minutes

Exercice 1 (10 pts):

Pour chacune des questions qui suivent, dire, sans justification, si elle est vraie ou fausse. Pour chacune des questions, il est compté un point si la réponse est exacte et zéro sinon.

1. Soient les expressions logiques

$$(*) \qquad p \Rightarrow \big(q \Rightarrow (non(r))\big).$$
$$(**) \qquad (non(q)) \ ou \ (non(r)) \ ou \ (non(p)).$$

1.1. On a : $(*) \Leftrightarrow (**)$.
1.2. L'expression $(*)$ est vraie dans le cas où l'on a l'expression : $(p \ ou \ r)$ est fausse.

2. Soient les quantificateurs Q_1, Q_2 et $Q_3 \in \{\exists; \forall\}$ et l'expression

$$(***) \qquad Q_1 x \in \mathbb{N}, \quad Q_2 y \in \mathbb{N}, \quad Q_3 z \in \mathbb{N}, \quad x = yz.$$

$(***)$ n'est vraie que dans un seul cas.

3. Soient A, B et C trois ensembles quelconques.
3.1. On a toujours $(A \cup B) \setminus (A \cup C) \subset A \cup (B \setminus C)$.
3.2. On n'a jamais $(A \cup B) \setminus (A \cup C) = A \cup (B \setminus C)$.
4. Soit $P(x) = x^3 - 6x^2 + 13x - 10$
4.1. $(2 - x)$ divise $P(x)$.
4.2. $(2 - i)$ et $(2013 - i)$ sont des racines de $P(x)$.
5. Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 et en 1 et telle que $f(x^2) = f(x)$, alors f est constante.
6. Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et périodique alors f n'est pas bornée.
7. Soit $f: [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue et telle qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ t.q. : $0 \le f(x) \le k \int_0^x f(t)dt$ alors $f \equiv 0$.

Exercice 2 (5 pts):

Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ des nombres réels positifs non nuls distincts deux à deux, l'objectif est de montrer l'inégalité $\left(\prod_{i=1}^n a_i\right) < \left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}\right)^n$.

1. Montrer que $a_1 a_2 < \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2$.
2. Montrer que $a_1 a_2 a_3 a_4 < \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}\right)^4$.
3. Montrer que $a_1 a_2 \dots a_{2^k} < \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2^k}}{2^k}\right)^{2^k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$.
4. On suppose $n < 2^k$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$ et que $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont donnés. On pose $c_1 = a_1, c_2 = a_2, \dots, c_n = a_n$ puis $c_{n+1} = c_{n+2} = \dots = c_{2^k} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} = u$. Déduire de la question 3 que $a_1 a_2 \dots a_n u^{2^k - n} < u^{2^k}$.
5. Conclure.

Exercice 3 (9 pts):

Notations : Soient a et b deux entiers dans $\mathbb{N}^*$*, on note* $b|a$ *si b est un diviseur de a et on définit* $D_a = \{d \in \mathbb{N}^* : d|a\}$ *l'ensemble des diviseurs de a. On note, enfin,* $a \wedge b$ *le plus grand commun diviseur de a et b qui vaut le plus grand élément de l'ensemble* $D_a \cap D_b$.

1. Montrer que $D_{a\wedge b} = D_a \cap D_b$.
2. Montrer que $\forall a,b,c \in \mathbb{N}^*$ $\quad (a \wedge b) \wedge c = (a \wedge b) \wedge (b \wedge c)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$. Montrer que $S_n = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
4. Soit un entier $p \in \mathbb{N}^*$ quelconque.
   4.1. Calculer $S_{2p} \wedge S_{2p+1}$.
   4.2. Calculer $S_{2p+1} \wedge S_{2p+2}$.
   4.3. Calculer $S_{2p} \wedge S_{2p+1} \wedge S_{2p+2}$.
   4.4. Calculer $S_{2p+1} \wedge S_{2p+2} \wedge S_{2p+3}$.
5. Calculer $(S_n \wedge S_{n+1}) \wedge S_{n+2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Problème 1 (22 pts):

Partie A : Questions préliminaires **(7 pts)**

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{Z}$ supposée convergente vers $l \in \mathbb{R}$.
   1.1 Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ t.q. $\quad \forall n \geq m \quad |u_n - l| < 1/4$.
   1.2 Montrer que $\forall n \geq m \quad |u_n - u_{n+1}| < 1/2$.
   1.3 En déduire que $(u_n)_{n\geq m}$ est constante.
   « On a montré que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite dans* $\mathbb{Z}$ *convergente alors elle est stationnaire. »*
2. Soient f une fonction continue et positive et F sa primitive sur $[a,b]$ c.à.d: $\int_a^x f(t)dt = F(x)$.
   2.1 Montrer que F est croissante.
   2.2 Supposons qu'$\exists x_0 \in [a,b]$ t.q. $f(x_0) > 0$, montrer alors qu'il existe un intervalle $I \subset [a,b]$ tel que $x_0 \in I$ et vérifiant $f(x) > 0 \quad \forall x \in I$.
   2.3 Déduire de 2.1 et 2.2 que si $f \geq 0$ telle que $\int_a^b f(t)dt = 0$ alors $f \equiv 0$.
   2.4 Soit $M \in \mathbb{R}^+$ t.q. $f \leq M$ et g une autre fonction continue et positive sur $[a,b]$. Montrer que $\int_a^b f(t)g(t)dt \leq M \int_a^b g(t)dt$.

Partie B **(7 pts)**:

Soient p, q *et* $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $P_n(X) = \frac{1}{n!}(qX - p)^n X^n$ et $I_n = \int_0^\pi P_n(x)\sin(x)\,dx$.

1. Montrer que $P_n(0)$ et $P_n\left(\frac{p}{q}\right)$ sont dans $\mathbb{Z}$.
2. Montrer que
$$(X^n)^{(i)}(0) = \begin{cases} 0 & si\ i \neq n \\ n! & si\ i = n, \end{cases}$$
   et que
$$((qX-p)^n)^{(i)}\left(\frac{p}{q}\right) = \begin{cases} 0 & si\ i \neq n \\ n!\,q^n & si\ i = n. \end{cases}$$
3. En déduire que $(P_n)^{(k)}(0)$ et $(P_n)^{(k)}\left(\frac{p}{q}\right) \in \mathbb{Z} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$.
4. Vérifier qu' $\exists M \in \mathbb{R}^+ \quad sup_{[0,\pi]}|X(qX-p)| \leq \pi M$.
5. Montrer que $\forall p,q \in \mathbb{N}^* \quad I_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Université My Ismail
ENSAM-Meknès

21 Juillet 2007

Partie C (8 pts):

Supposons qu'$\exists\, p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\pi = \frac{p}{q}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_n \in \mathbb{Z}$
2. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad I_{2n} = 0$.
3. En déduire que $P_{2n}(\pi/2) = 0 \quad \forall n \geq N$.
4. Savez-vous ce que vous avez démontré ?

Problème 2 (9 pts):

1. Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre un ballon afin de le crever. A chacun de ces tirs, il a la probabilité 0,2 de crever le ballon. Le tireur s'arrête quand le ballon est crevé. Les tirs successifs sont supposés indépendants.
   1.1.Quelle est la probabilité qu'au bout de deux tirs le ballon soit intact ?
   1.2.Quelle est la probabilité que deux tirs suffisent pour crever le ballon ?
   1.3.Quelle est la probabilité p_n que n tirs suffisent pour crever le ballon ?
   1.4.Pour quelles valeurs de n a-t-on $p_n > 0{,}99$?
2. Ce tireur participe au jeu suivant :
   Dans un premier temps il lance un dé tétraédrique régulier dont les faces sont numérotées de 1 à 4 (la face obtenue avec un tel dé est la face cachée) ; soit k le numéro de la face obtenue. Le tireur se rend alors au stand de tir et il a droit à k tirs pour crever le ballon.
   Démontrer que, si le dé est bien équilibré, la probabilité de crever le ballon est égale à 0,4096 (on pourra utiliser un arbre pondéré).
3. Le tireur décide de tester le dé tétraédrique afin de savoir s'il est bien équilibré ou s'il est pipé. Pour cela il lance 200 fois ce dé et il obtient le tableau suivant :

Face k	1	2	3	4
Nombre de sorties de la face k	58	49	52	41

   3.1. Calculer les fréquences de sorties f_k observées pour chacune des faces.
   3.2. On pose $d^2 = \sum_{k=1}^{4}\left(f_k - 1/4\right)^2$. Calculer d^2.
   3.3. On effectue maintenant 1000 simulations des 200 lancers d'un dé tétraédrique bien équilibré et on calcule pour chaque simulation le nombre d^2. On obtient pour la série statistique des 1000 valeurs de d^2 les résultats suivants :

Minimum	D_1	Q_1	Médiane	Q_3	D_9	Maximum
0,00124	0,00192	0,00235	0,00281	0,00345	0,00452	0,01015

   Au risque de 10% peut-on considérer que ce dé est pipé ?