



السنة الثانية من سلك البكالوريا
شعبة العلوم التجريبية
السنة الدراسية : 2008-2009

الامتحان التجريبي لمادة الرياضيات
مدة الإنجاز : 3 ساعات

الثانوية التأهيلية التوأمة
نيابة الحوز
الأستاذ : محمد الراقي

التمرين ① : (3 نقط)

نعتبر المعادلة التفاضلية : $(E) : y'' + 2\sqrt{2}y' + 2y = 0$.

(1) حدد الحل العام للمعادلة التفاضلية (E) .

(2) بين أن f حل المعادلة التفاضلية (E) والذي يحقق $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$ هو $f(x) = xe^{-\sqrt{2}x}$.

(3) باستعمال مكاملة بالأجزاء، أحسب التكامل التالي : $I = \int_0^1 f(x) dx$.

التمرين ② : (4,5 نقط)

I- حل في \mathbb{C} المعادلة التالية : $-z^2 = 2z + 10$.

II- نعتبر، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم (o, \vec{u}, \vec{v}) ، النقط A و B و C التي ألقاها على

التوالي هي : $z_A = 1+i$ و $z_B = -1+3i$ و $z_C = -3+i$.

ليكن z لحد نقطة M من المستوى و z' لحد النقطة M' صورة M بالتحاكي h الذي مركزه Ω ذات اللحد $\omega = 5+i$ و نسبته 2 .

(1) أ- بين أن $z' = 2z - 5 - i$.

ب- تحقق من أن النقطة C هي صورة النقطة A بالتحاكي h .

(2) أ- حدد معيار و عمدة العدد العقدي $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$.

ب- استنتج أن المثلث ABC متساوي الساقين وقائم الزاوية في B .

(3) بين أن لحد النقطة D بحيث $ABCD$ مربع هو $z_D = -1-i$.

(4) نعتبر النقطتين E ذات اللحد $z_E = 1+5i$ و I منتصف القطعة $[BC]$.

أ- أكتب العدد العقدي $\frac{z_I - z_A}{z_D - z_E}$ على الشكل الجبري .

ب- استنتج أن $DE = 2AI$ و أن $(AI) \perp (DE)$.

التمرين ③ : (3 نقط)

نعتبر المتتاليتين العدديتين $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفتين بمايلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{e}} \\ u_{n+1} = 1 + \sqrt[3]{u_n - 1} \end{cases} \quad \text{و} \quad v_n = \ln(u_n - 1)$$

(1) تحقق أن $v_0 = -\frac{1}{3}$ ثم بين أن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ 0,75

(2) استنتج أن $\ln(u_n - 1) = -\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ 0,75

(3) حدد u_n بدلالة n 0,75

(4) استنتج نهاية المتتالية (u_n) 0,75

مسألة : (9,5 نقط)

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على \mathbb{R} بمايلي : $f(x) = x - \frac{1}{e^x + 1}$

و ليكن (C) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 0,5

(2) أ- بين أن $f'(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ 0,5

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f 0,5

(3) أ- بين أن المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $(\Delta_1): y = x$ و $(\Delta_2): y = x - 1$ مقاربان مائلان للمنحنى 0,5

(C) على التوالي بجوار $+\infty$ و بجوار $-\infty$.

ب- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) بالنسبة للمستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) 0,5

(4) أ- بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J يتم تحديده. 0,5

ب- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ (نقبل أن $\frac{1}{1 + \sqrt{e}} < \frac{1}{2}$) 0,75

ج- تحقق أن $e^\alpha + 1 = \frac{1}{\alpha}$ 0,5

(5) أ- تحقق أن $\frac{1}{e^{-x} + 1} = 1 - \frac{1}{e^x + 1}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ 0,25

ب- بين أن النقطة $I(0, -\frac{1}{2})$ مركز تماثل المنحنى (C) . (يمكنك استعمال نتيجة السؤال (5) أ-) 0,75

ج- أعط معادلة للمستقيم (T) مماس المنحنى (C) في النقطة ذات الأفصول 0. 0,75

(6) أنشئ (Δ_1) و (Δ_2) و (C) في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) . (أخذ $\alpha \approx 0,45$) 1

(7) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المعرفة بمايلي : $u_n = \int_{\alpha}^n (x - f(x)) dx$

أ- ما هو التأويل الهندسي ل u_n 0,75

ب- تحقق أن $x - f(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x + 1}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ 0,25

ج- أحسب u_n بدلالة n 0,75

د- بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = -(\alpha + \ln \alpha)$. (يمكنك استعمال نتيجة السؤال (4) ج-) 0,75