الدوال اللوغارتمية

الأستاذ:
جمال صوالحي

القدرات المنتظرة

- التمكن من الحسابات الجبرية اللوغار يتمات
- التمكن من حل معادلات و متراجحات و نظمات لوغاريتمية
- معرفة اللوغاريتم العشري و تطبيقاته حل المعادلات من النوع $(10^x = a)$
- التمكن من النهايات اللوغاريتمية الأساسية و توظيفها.
- التمكن من دراسة و تمثيل دوال تحتوي على دوال لوغاريتمية .

أهداف الدرس

- التمكن من دالة اللوغاريتم النبيري
- معرفة الخاصيات الجبرية لدالة اللوغاريتم النبيري
- التمكن من دراسة دالة اللوغاريتم النبيري
- التعرف على نهايات اللوغاريتم الأساسية
- معرفة المشتقة اللوغارتمية لدالة و مشتقة الدالة $x \mapsto ln|u(x)|$
- التمكن من تحديد دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$
- التعرف على دالة اللوغاريتم للأساس a.
- توظيف الدوال اللوغارتمية في مواد أخرى من مواد التخصص.

الامتدادات

- الحساب التكاملي
- الفيزياء و الكيمياء
- الإحصاء و الاحتمالات
- علوم الحياة و الأرض
- العلوم الاقتصادية
- الحسابات الجبرية

فقرات الدرس

- دالة اللوغاريتم النبيري
- دراسة دالة اللوغاريتم النبيري
- نهايات اعتيادية أخرى
- المشتقة اللوغاريتمية لدالة
- دالة اللوغاريتم للأساس a
- دالة اللوغاريتم العشري.
- دراسة دالة اللوغاريتم للأساس a.

عدد الساعات: 10

جمال صوالحي

الدوال اللوغارتمية

الأستاذ:
جمال صوالحي

I)-دالة اللوغاريتم النبيري Fonction logarithme népérien

الدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ متصلة على المجال $]0,+\infty[$ ، إذن تقبل دوال أصلية على المجال $]0,+\infty[$ ،
و تقبل دالة أصلية وحيدة تنعدم في 1.

تعريف Definition

دالة اللوغاريتم النبيري هي الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على المجال $]0,+\infty[$ و التي تنعدم في 1.
و نرمز لها بالرمز: ln.

نتائج

- مجموعة تعريف الدالة ln هي المجال $]0,+\infty[$.
- $ln\,1=0$
- الدالة ln قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ و لدينا: $\forall x\in]0,+\infty[,(ln\,x)'=\frac{1}{x}$
- الدالة ln تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$. أي: $\forall a,b\in]0,+\infty[,a<b \Leftrightarrow ln\,a<ln\,b$.
- $\forall a,b\in]0,+\infty[,ln\,a=ln\,b \Leftrightarrow a=b$.
- $ln\,x=0 \Leftrightarrow x=1$ و $ln\,x>0 \Leftrightarrow x>1$ و $ln\,x<0 \Leftrightarrow 0<x<1$.

تمرين تطبيقي

- حدد مجموعة تعريف الدوال التالية:

$f:x\mapsto\frac{x}{ln\,x}$ $\quad g:x\mapsto\sqrt{(x-1)ln\,x}$ $\quad h:x\mapsto ln\,ln\,x$.

- حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

$ln\,2x=ln(x^2+1)$ $\quad ln(x-1)-ln(3x+1)=0$ $\quad ln\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)=0$

- حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

$ln(3x+2)<0$ $\quad ln(x-1)<ln(2x-1)$ $\quad ln\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)\geq 0$

خاصيات جبرية

الخاصية الأساسية

لكل a و b من المجال $]0,+\infty[$ ، لدينا: $ln(ab)=ln\,a+ln\,b$

برهان

نضع : $\forall x>0,F(x)=ln(kx)$ و $\forall x>0,u(x)=kx$ ، حيث $k\in\mathbb{R}_+^*$.
لدينا : $\forall x>0,F(x)=ln\circ u(x)$ إذن F قابلة للاشتقاق عل المجال $]0,+\infty[$ و لدينا:

$$\forall x>0,F'(x)=ln'(u(x))\times u'(x)=\frac{1}{x}$$

إذن $\exists c\in\mathbb{R}/\ F(x)=ln\,x+c$ و من أجل $x=1$ ، $ln\,k=c$.
ومنه $ln(kx)=ln\,x+ln\,k$.
إذا وضعنا: $x=a$ و $k=b$ فإن: $ln(ab)=ln\,a+ln\,b$.

جمال صوالحي

ملاحظة

نبين بالترجع أن: $ln\left(\prod_{i=1}^{i=n} a_i\right)=\sum_{i=1}^{i=n} ln\left(a_i\right)$ حيث a_1 و a_2 و...و a_n أعدادا حقيقية موجبة قطعا.

خاصية

لكل a و b من المجال $]0,+\infty[$ ، و لكل r من $\mathbb{Q}$ ، لدينا:

1)- $ln\left(\frac{1}{a}\right)=-ln\,a$

2)- $ln\left(\frac{a}{b}\right)=ln\,a-ln\,b$

3)- $ln\left(a^r\right)=r\,ln\,a$

4)- $ln\sqrt{a}=\frac{1}{2}ln\,a$

برهان

1)- لدينا: $\forall a>0, 0=ln\,1=ln\left(a\times\frac{1}{a}\right)=ln\,a+ln\frac{1}{a}$ و منه $ln\left(\frac{1}{a}\right)=-ln\,a$.

2)- لدينا: $ln\left(\frac{a}{b}\right)=ln\left(a\times\frac{1}{b}\right)=ln\,a+ln\frac{1}{b}=ln\,a-ln\,b$ لكل a و b من $\mathbb{R}_+^*$.

3)- إذا كان $r=n\in\mathbb{N}$: $a_1=a_2=....=a_n=a$ و نحصل على: $ln\,a^n=n\,ln\,a$

إذا كان $r=-n\in\mathbb{Z}^-$: $\forall a>0, ln\,a^r=ln\frac{1}{a^n}=-ln\,a^n=-n\,ln\,a^n=r\,ln\,a$

إذا كان $r=\frac{p}{q}$: $\forall a>,q\ ln\,a^r=ln\,a^{qr}=ln\,a^p=p\,ln\,a$ إذن $\forall a>0, ln\,a^r=r\,ln\,a$

ملاحظة

- إذا كان $xy>0$ فإن: $ln\left(xy\right)=ln\left|x\right|+ln\left|y\right|$ و $ln\left(\frac{x}{y}\right)=ln\left|x\right|-ln\left|y\right|$ و $ln\,x^2=2\,ln\left|x\right|$
- لكل x من المجال $]0,+\infty[$ و لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، لدينا: $ln\sqrt[n]{x}=\frac{1}{n}ln\,x$.

تمرين تطبيقي

- بسط العدد: $A=ln\sqrt{2-\sqrt{2}}+ln\sqrt{2+\sqrt{2}}$.
- $B=ln\left(\sqrt{2}-1\right)^{2009}+ln\left(\sqrt{2}+1\right)^{2009}$
- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $ln\left(-x+3\right)=2$ ثم المتراجحة: $ln\left(-x+3\right)\geq 2$

II)- دراسة دالة اللوغاريتم النبيري

مجموعة تعريف الدالة ln هي المجال $]0,+\infty[$.

1)- نهايات اعتيادية

خاصية

$\lim_{x\to+\infty} ln\,x=+\infty$ و $\lim_{x\to0^+} ln\,x=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{ln\,x}{x}=0$

ملاحظة

لدينا : $\lim_{x\to0^+} ln\,x=-\lim_{x\to0^+} ln\frac{1}{x}=-\lim_{x\to+\infty} ln\,x=-\infty$.

جمال صوالحي

2)- جدول تغيرات الدالة ln

الدالة ln قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ و لدينا : $\forall x>0,(ln)'(x)=\frac{1}{x}>0$

x	0		1		$+\infty$
$(ln)'(x)$		$+$		$+$	
$ln\,x$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

3)- الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة ln

- لدينا: $\lim\limits_{x\to 0^+} ln\,x=-\infty$ إذن محور الأراتيب مقارب عمودي لمنحنى الدالة ln.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} ln\,x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ln\,x}{x}=0$ إذن منحنى ln يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$

4)- العدد e

- الدالة ln متصلة و تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$

إذن: $ln\left(]0,+\infty[\right)=\left]\lim\limits_{x\to 0^+} ln\,x,\lim\limits_{x\to+\infty} ln\,x\right[=]-\infty,+\infty[$.

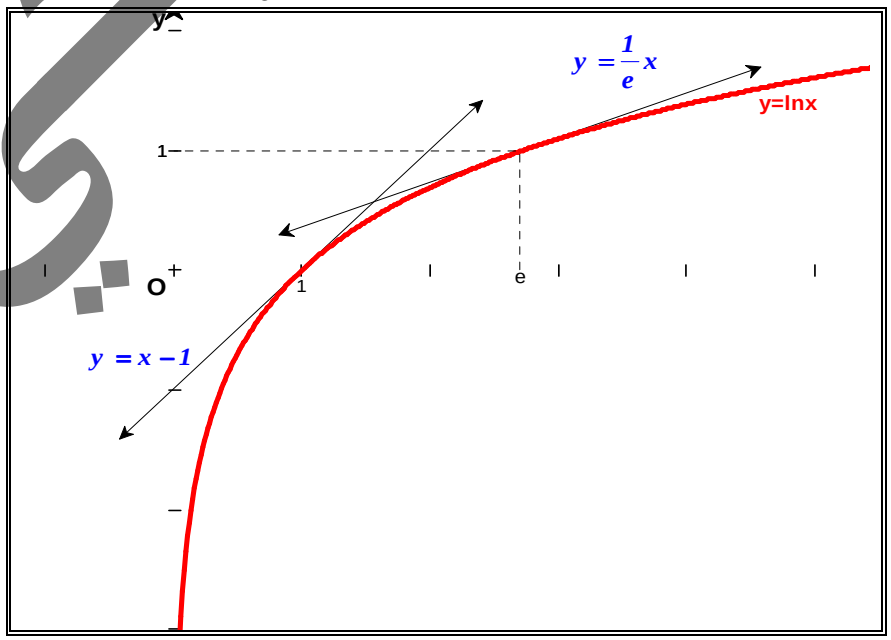
- و بما أن $1\in]-\infty,+\infty[$ فإن المعادلة $ln\,x=1$ تقبل حلا و حيدا في المجال $]0,+\infty[$ يرمز له بالحرف e.

و لدينا : $ln\,e=1$ و $e\notin\mathbb{Q}$ و $e\approx 2.718$.

- $\forall x>0,\forall k\in\mathbb{Q},ln\left(e^k\right)=k$ و $\forall x>0,\forall k\in\mathbb{Q},ln\,x=k\Leftrightarrow x=e^k$.
- $\forall x>0,\forall k\in\mathbb{Q},ln\,x\le k\Leftrightarrow x\le e^k$

5)- منحنى الدالة ln

- معادلة مماس منحنى الدالة ln في النقطة التي أفصولها 1 هي : $y=x-1$.
- معادلة مماس منحنى الدالة ln في النقطة التي أفصولها e هي : $y=\frac{1}{e}x$.



جمال صوالحي

تمرين01

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f(x)=x-\ln x$

1)- حدد D_f ثم أحسب النهايات عند محدات D_f.

2)- أدرس تغيرات الدالة f

3)- أدرس الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة f.

4)- أنشئ منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم

III)- نهايات اعتيادية أخرى

خاصية

$\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=0$ و $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$ و $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \lim\limits_{x\to 0^+} x^n\ln x=0$ و $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=0$

برهان

- $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=-\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=-\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln t}{t}$.
- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=\ln'(1)=1$.
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\ln'(1)=1$.
- $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \lim\limits_{x\to 0^+} x^n\ln x=\dfrac{1}{n}\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^n\ln x^n\right)=\dfrac{1}{n}\lim\limits_{t\to 0^+} t\ln t=0$.
- $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=\dfrac{1}{n}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x^n}{x^n}\right)=\dfrac{1}{n}\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln t}{t}=0$.

تمرين تطبيقي

أحسب النهايات التالية:

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ و $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x^2}+\ln x\right)$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} x(\ln x)^3$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^3}{x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-(\ln x)^2\right)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{2}{3}}\ln x$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^{\frac{2}{3}}}{x}$.

تمرين02

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي: $u_n=\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.

1)- أ- أحسب u_1 و u_2 . ب- أحسب $u_{n+1}-u_n$ و استنتج رتابة $(u_n)_{n\geq 1}$.

2)- نضع : $s_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n$

أحسب s_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$.

جمال صوالحي

IV)- المشتقة اللوغاريتمية لدالة . La dérivée logarithmique d'une fonction

نشاط

لتكن u دالة قابلة للاشتقاق على المجال I، و لا تنعدم على المجال I.

لدينا: u قابلة للاشتقاق على المجال I ، إذن u دالة متصلة على I . و بما أن u لا تنعدم على I، فإن u تحتفظ بنفس الإشارة على المجال I .

نضع : $f(x)=ln(|u(x)|)$.

❖ إذا كانت u موجبة قطعا على المجال I فإن:

لدينا: $\forall x\in I, f(x)=ln\circ u(x)$. و بما أن u قابلة للاشتقاق على I و $u(I)\subset]0,+\infty[$،

و ln قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ و لدينا: $\forall x\in I, f'(x)=ln'(u(x))\times u'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$

❖ إذا كانت u سالبة قطعا على المجال I فإن:

لدينا: $\forall x\in I, f(x)=ln\circ(-u(x))$. و بما أن u قابلة للاشتقاق على I و $-u(I)\subset]0,+\infty[$

و ln قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ و لدينا: $\forall x\in I, f'(x)=-ln'(-u(x))\times u'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$

خاصية

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I، و لا تنعدم على المجال I، فإن الدالة $x\mapsto ln(|u(x)|)$ قابلة للاشتقاق على I و دالتها المشتقة على I هي الدالة: $x\mapsto\frac{u'(x)}{u(x)}$.

تمرين تطبيقي

حدد $f'(x)$ لكل x من المجال I في الحالات التالية:

1)- $f(x)=ln(x^2+x+1)$ و $I=]-\infty,+\infty[$.

2)- $f(x)=ln|1-ln\,x|$ و $I=]e,+\infty[$.

تعريف

لتكن u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I، و لا تنعدم على المجال I.

الدالة: $x\mapsto\frac{u'(x)}{u(x)}$ تسمى المشتقة اللوغاريتمية للدالة u على المجال I

خاصية

لتكن u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I، و لا تنعدم على المجال I .

الدوال الأصلية للدالة: $x\mapsto\frac{u'(x)}{u(x)}$ على المجال I هي الدوال: $x\mapsto ln(|u(x)|)+c$ حيث $(c\in\mathbb{R})$

تمرين تطبيقي

- الدوال الأصلية للدالة $x\mapsto\frac{1}{2x+1}$ على المجال $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[$ هي الدوال: $x\mapsto\frac{1}{2}ln|2x+1|+c$، $(c\in\mathbb{R})$
- الدوال الأصلية للدالة $x\mapsto tan\,x$ على المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ هي الدوال $x\mapsto -ln|cos\,x|+c$، $(c\in\mathbb{R})$.

جمال صوالحي

تمرين03

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]2,+\infty[$ بما يلي: $f(x)=\frac{x^2}{4-x}$.

1)- حدد الأعداد الحقيقية a و b و c بحيث: $\forall x\in]2,+\infty[, f(x)=a+\frac{b}{2-x}+\frac{c}{2+x}$

2)- استنتج الدوال الأصلية للدالة f على المجال $]2,+\infty[$.

تمرين04

حدد الدوال الأصلية للدالة f على المجال I في الحالات التالية:

1)- $f(x)=\frac{x^3}{x^4+1}$ و $I=]-\infty,+\infty[$.

2)- $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ و $I=]0,1[$

تمرين05

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x)=x+\ln(\ln x)$.

1)- أثبت أن حيز تعريف الدالة f هو $D_f=]1,+\infty[$.

2)- أحسب $f'(x)$ ثم استنتج تغيرات الدالة f .

3)- أدرس الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة f .

4)- أنشئ منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم

تمرين06

نعتبر الدالتين العدديتين u و f للمتغير الحقيقي x المعرفتين بما يلي:

$u(x)=x^2-2x+3$ و $f(x)=\ln(x^2-2x+3)$.

1)- أ- بين أن : $\forall x\in\mathbb{R}, u(x)>0$ و استنتج أن : $D_f=]-\infty,+\infty[$

ب- أحسب : $u(1+\sqrt{2})$ و $u(1-\sqrt{2})$.

2)- أحسب النهايتين : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

3)- أحسب $f'(x)$ ثم أدرس تغيرات الدالة f .

4)- بين أن المستقيم ذو المعادلة " $x=1$ " محور تماثل لمنحنى الدالة f .

5)- أ- أثبت المتساوي التالية : $\forall x\in\mathbb{R}^*, \frac{f(x)}{x}=2\frac{\ln(|x|)}{x}+\frac{\ln\left(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{x}$.

ب- أدرس الفرعين اللانهائيين لمنحنى الدالة f.

6)- أ- بين أن منحنى الدالة f يقبل نقطتي انعطاف ثم حدد إحداثي كل منهما .

ب- أرسم منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم.

7)- لتكن g قصور الدالة f على المجال $I=[1,+\infty[$.

أ- بين أن الدالة g تقابل من المجال I نحو مجال J يتم تحديده.

ب- حدد تعبير $g^{-1}(x)$ بدلالة x لكل x من J.

(نأخذ : $\ln 2\approx 0.7$ و $\ln 3\approx 1.1$)

جمال صوالحي

V)- دالة اللوغاريتم الأساس a حيث ($a>0$ و $a\neq 1$): Fonction logarithme de base a

1)- تعريف

ليكن a عددا حقيقيا موجبا قطعا و مخالفا للعدد 1

دالة اللوغاريتم للأساس a هي الدالة العددية التي يرمز لها بالرمز Log_a و المعرفة على $]0,+\infty[$

بما يلي: $Log_a(x)=\dfrac{\ln x}{\ln a}$

2)- نتائج

$Log_a(1)=0$ $\qquad$ $Log_a(a)=1$ $\qquad$ $Log_a(e)=\dfrac{1}{\ln a}$

$\forall x>0, Log_e(x)=\dfrac{\ln x}{\ln e}=\ln x$ ومنه $\ln = Log_e$.

خاصية

لكل x و y من المجال $]0,+\infty[$ ، و لكل r من $\mathbb{Q}$ ، لدينا:

1)- $Log_a(xy)=Log_a(x)+Log_a(y)$

2)- $Log_a\left(\dfrac{1}{x}\right)=-Log_a x$

3)- $Log_a\left(\dfrac{x}{y}\right)=Log_a(x)-Log_a(y)$

4)- $Log_a(x^r)=rLog_a x$

تمرين تطبيقي

بسط ما يلي:

$A=Log_2\left(\dfrac{1}{5}\right)+Log_2(10)$ $\qquad$ $B=Log_{\frac{1}{3}}\left(\sqrt[5]{3}\right)$

3)- دراسة دالة اللوغاريتم للأساس a

الدالة Log_a قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ و لدينا : $\forall x>0, (Log_a)'(x)=\left(\dfrac{\ln x}{\ln a}\right)'=\dfrac{1}{x\ln a}$

و منه نستنتج الجدولين التاليين :

حالة $a>1$

x	0		1		a		$+\infty$
$(Log_a)'(x)$	‖	$+$		$+$		$+$	
$Log_a(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$

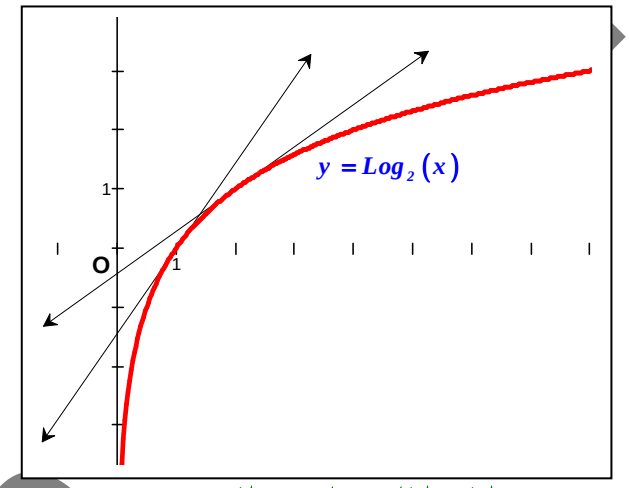
حالة $0<a<1$

x	0		a		1		$+\infty$
$(Log_a)'(x)$	‖	$+$		$+$		$+$	
$Log_a(x)$	‖ $+\infty$	↘	1	↘	0	↘	$-\infty$

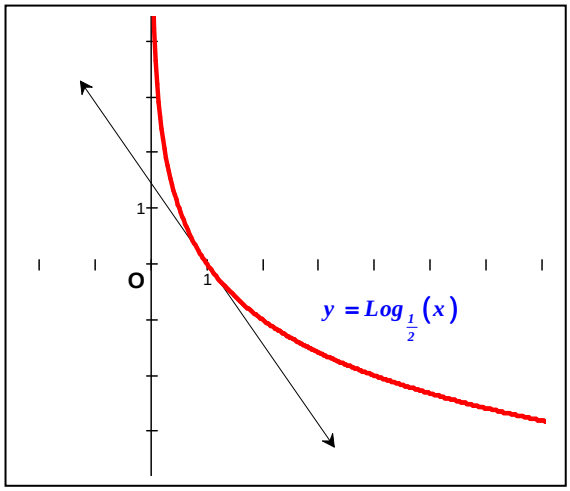
جمال صوالحي

4)- أنشاء منحنى الدالة Log_a

حالة $a>1$



حالة $0<a<1$



VI)- دالة اللوغاريتم العشري Fonction logarithme décimal

تعريف

دالة اللوغاريتم العشري هي دالة اللوغاريتم للأساس 10 و يرمز لها بالرمز log عوض Log_{10}

و لدينا: $\forall x \in]0,+\infty[, log(x) = \frac{ln\, x}{ln\, 10}$.

نتائج

$log(1)=0$ $\quad$ $log(10)=1$ $\quad$ $\forall r \in Q, log(10^r)=r$

لدينا: $log\, x = M\, ln\, x$ حيث $M \approx 0.43294481...$

تمرين تطبيقي

بسط : $A = log(250000) + log\sqrt{250} + -log(125)$.

تمرين07

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي: $f(x) = \begin{cases} \frac{x+ln\,x}{x-ln\,x}, x>0 \\ f(0)=-1 \end{cases}$.

1)-أ- بين أن $D_f = [0,+\infty[$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و أول النتيجة هندسيا.

ب- بين أن الدالة f متصلة في الصفر على اليمين.

2)- أ- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في الصفر على اليمين ثم أول النتيجة هندسيا.

ب- بين أن : $\forall x \in]0,+\infty[, f'(x) = \frac{2(1-ln\,x)}{(x-ln\,x)^2}$.

ج- أعط جدول تغيرات الدالة f.

4)- أ- بين أن (C_f) يقطع محور الأفاصيل في نقطة أفصولها ينتمي إلى المجال $\left]\frac{1}{2},1\right[$.

ب- أرسم (C_f) في معلم متعامد ممنظم.(نأخذ $ln\,2 \approx 0.7, e \approx 2.7$).

صوالحي

الدوال اللوغارتمية

الأستاذ:
جمال صوالحي

تمرين

I - نعتبر الدالة العددية h المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $h(x)=2x\sqrt{x}-2+\ln x$

1. احسب النهايتين $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} h(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.

2. أ. احسب $h'(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$ و بين أن h متزايدة على $]0,+\infty[$.

ب . احسب $h(1)$ و استنتج إشارة $h(x)$ على المجال $]0,+\infty[$.

II – نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=x-1-\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1 . أ . احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} f(x)$ واعط تأويلا هندسيا للنتيجة.

ب . احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x-1)\right)$ (لاحظ أن $\ln x=2\ln\sqrt{x}$)، و اعط تأويلا هندسيا للنتيجة .

2 . أ . بين أن $f'(x)=\dfrac{h(x)}{2x\sqrt{x}}$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$. ب . ضع جدول تغيرات الدالة f .

3 . أ . ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (D) الذي معادلته $y=x-1$

ب . أنشئ المستقيم (D) والمنحنى (C) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

I- الدالة العددية h المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $h(x)=2x\sqrt{x}-2+\ln x$

1 . بما أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} 2x\sqrt{x}-2=-2$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}}\ln x=-\infty$ إذن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} h(x)=-\infty$

* لدينا $h(x)=x\left(2\sqrt{x}-\dfrac{2}{x}+\dfrac{\ln x}{x}\right)$ بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}2\sqrt{x}=+\infty$

فان $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$

2 . لدينا لكل x من $]0,+\infty[$: $h'(x)=(2x)'\sqrt{x}+2x\left(\sqrt{x}\right)'+(\ln x)'=3\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}$

$3\sqrt{x}\succ 0$ و $-\succ 0$ فان $h'(x)\succ 0$ و منه فان الدالة h تزايدية على $]0,+\infty[$

ب . لدينا $h(1)=2-2+\ln(1)=0$

إذا كان $x\in]0,1]$: لدينا $x\le 1$ إذن $h(x)\le h(1)$ أي $h(x)\le 0$

إذا كان $x\in[1,+\infty[$: لدينا $x\ge 1$ إذن $h(x)\ge h(1)$ أي $h(x)\ge 0$

II) 1 أ. لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}}(\ln x)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}}\ln x=-\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

و لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} x-1=-1$ إذن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} f(x)=+\infty$

التأويل الهندسي : المنحنى (C) يقبل مقارب رأسي معادلته $x=0$.

ب . لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}2\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1=+\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x-1)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}=0$ إذن المنحنى (C) يقبل مقارب مائل معادلته $y=x-1$.

2 . أ . لكل x من المجال $]0,+\infty[$ لدينا : $f'(x)=1-\dfrac{(\ln x)'\sqrt{x}-(\ln x)\left(\sqrt{x}\right)'}{\sqrt{x}^2}$ $=\dfrac{h(x)}{2x\sqrt{x}}$ $=\dfrac{2x\sqrt{x}-2+\ln x}{2x\sqrt{x}}$

ب . لدينا $f'(x)=\dfrac{h(x)}{2x\sqrt{x}}$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$ بما أن $2x\sqrt{x}\succ 0$ فان إشارة $f'(x)$ هي إشارة $h(x)$

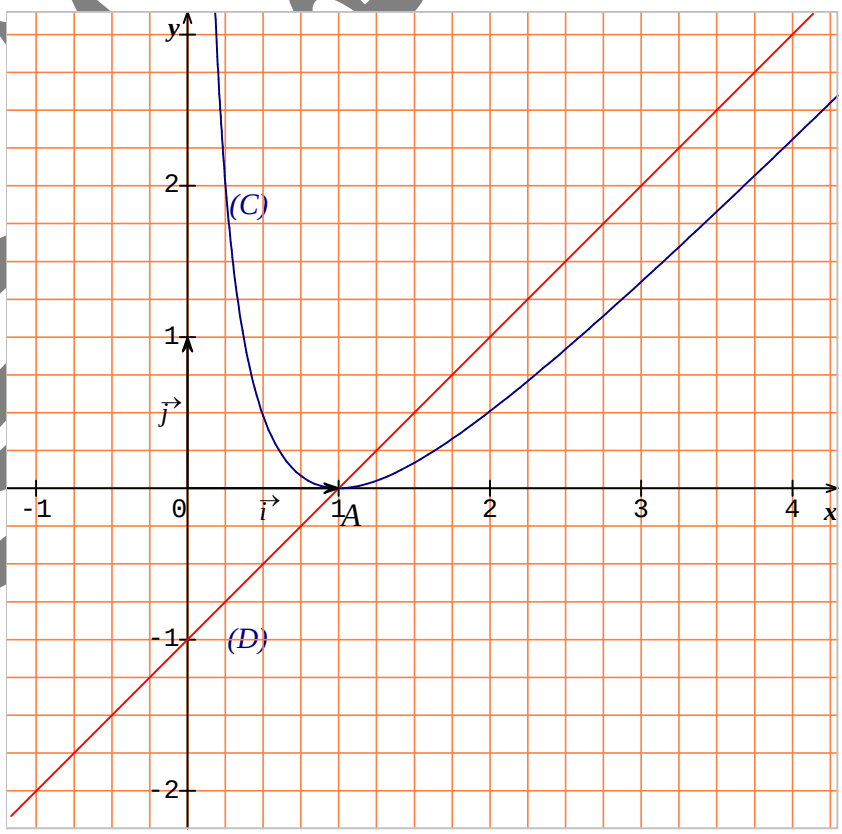
جدول تغيرات الدالة f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

3 . أ . لدينا $f(x)-(x-1)=-\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}=0$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$.

إشارة $f(x)-(x-1)$ هي عكس إشارة $\ln x$

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-(x-1)$		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي ل: (C) و (D)		المنحنى (C) فوق المستقيم (D)	A	المنحنى (C) تحت المستقيم (D)	

$A(1,0)$ هي نقطة تقاطع المنحنى (C) و المستقيم (D).

ب. المنحنى (C) :