الثانية ع ت	الدوال اللوغاريتمية والأسية	ح.بوعيون

I) دالة اللوغاريتم النيبري

① تعريف

نسمي دالة اللوغاريتم النيبري الدالة الأصلية F للدالة

$$f :]0,+\infty[\to IR$$
$$x \to \frac{1}{x}$$

والتي تحقق $F(1)=0$ ونرمز لها بـــ $\ln$ أو Log

ملاحظة

a) *) $\ln :]0,+\infty[\to IR$

*) $D_{\ln} =]0,+\infty[$

b) *) نعتبر الدالة $f(x)=\ln(u(x))$

لدينا $x\in D_f \Leftrightarrow u(x)>0$

*) نعتبر الدالة $f(x)=\ln|u(x)|$

لدينا $x\in D_f \Leftrightarrow u(x)\neq 0$

c) *) $\ln(1)=0$

*) $\ln(e)=1$ (مع $e\simeq 2,71828$)

*) $(\forall r\in Q) : \ln(e^r)=r$

② خاصيات الدالة $\ln$

ليكن $a>0$ و $b>0$ و $r\in Q$

*) $\ln(ab)=\ln a+\ln b$

*) $\ln(a^r)=r\ln a$

*) $\ln(\frac{1}{a})=-\ln a$

*) $\ln(\frac{a}{b})=\ln a-\ln b$

*) $\ln a=\ln b \Leftrightarrow a=b$

*) $\ln a<\ln b \Leftrightarrow a<b$

ملاحظة :

*) إذاكان $ab>0$ فإن : $\ln(ab)=\ln|a|+\ln|b|$

*) إذاكان $\frac{a}{b}>0$ فإن : $\ln(\frac{a}{b})=\ln|a|-\ln|b|$

*) إذاكان $a^n>0$ فإن : $\ln(a^n)=n\ln|a|$

③ إشارة $\ln(x)$

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	

④ الإشتقاق

*) $(\forall x>0) : (\ln x)'=\frac{1}{x}$

*) $(\ln u(x))'=\frac{u'(x)}{u(x)}$

*) $(\ln u|x|)'=\frac{u'(x)}{u(x)}$

⑤ النهايات الإعتيادية

a) $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ ($\ln(+\infty)=+\infty$)

b) $\lim_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty$ ($\ln(0)=-\infty$)

c) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

d) $\lim_{x\to0^+}x\ln x=0$

e) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ أو $\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=1$

ملاحظة

$$\frac{u(x)\ln(v(x))}{w(x)} \quad \left| \begin{array}{l} v(x)\to+\infty \to \frac{\ln t}{t} \\ v(x)\to 0^+ \to t\ln t \\ v(x)\to a\neq 0 \to \frac{\ln t}{t-1} \end{array}\right.$$

II) دالة الأس النيبري

① تعريف

نسمي دالة الأس النيبري الدالة العكسية للدلة $\ln$ونرمز لها بالرمز $x\to e^x$

ملاحظة

a) *) الدالة $x\to e^x$ معرفة على $\mathbb{R}$.

*) $(\forall x\in\mathbb{R}) : e^x>0$

b) *) $e^0=1$ *) $e^1=e$

c) *) $(\forall x\in\mathbb{R}) : \ln(e^x)=x$

*) $(\forall x>0) : e^{\ln(x)}=x$

d) *) $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y>0) \;:\; e^x=y \Leftrightarrow ln(y)=x$

② خاصيات

ليكن $x,y\in\mathbb{R}$ و $r\in Q$

*) $e^{x+y}=e^x\cdot e^y$ *) $e^{-x}=\frac{1}{e^x}$

*) $e^{x-y}=\frac{e^x}{e^y}$ *) $e^{rx}=(e^x)^r$

*) $e^x=e^y \Leftrightarrow x=y$

*) $e^x<e^y \Leftrightarrow x<y$

③ الإشتقاق

*) $(\forall x\in\mathbb{R}) : (e^x)'=e^x$

*) $(e^{u(x)})'=u'(x)e^{u(x)}$

4) النهايات الإعتيادية

a) $\lim_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$ $\quad (e^{+\infty} = +\infty)$

b) $\lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0$ $\quad (e^{-\infty} = 0)$

c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x} = +\infty$

d) $\lim_{x\to-\infty} xe^{x} = 0$

e) $\lim_{x\to0} \frac{e^{x}-1}{x} = 1$

ملاحظة

$$\frac{u(x)e^{v(x)}-\varphi(x)}{w(x)} \quad \left| \begin{array}{l} v(x)\to+\infty \to \frac{e^{t}}{t} \\ v(x)\to-\infty \to te^{t} \\ v(x)\to a\in\mathbb{R} \to \frac{e^{t}-1}{t} \end{array} \right.$$

III) دالة اللوغاريتم للأساس a .

1) تعريف

ليكن $a\in\mathbb{R}^{*+}-\{1\}$ نسمي دالة اللوغاريتم للأساس a الدالة التي نرمز لها بـــ $\log_{a}$ والمعرفة بـــ :

$$(\forall x>0): \log_{a}(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

حالات خاصة

*) الدالة $\log_{10}$ تسمى دالة اللوغاريتم العشري ونرمز لها بـــالرمز $\log$

$$(\forall x>0): \log(x) = \log_{10}(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

*) دالة اللوغارتم النيبيري هي دالة اللوغاريتم ذات الأساس e .

2) خاصيات

*) الدالة $\log_{a}$ لها نفس خاصيات $\ln$.

*) $\log_{a}(a)=1$ $\qquad$ *) $\log_{a}(1)=0$

*) $\log(10)=1$ $\qquad$ *) $\log(1)=0$

IV) الأس الحقيقي لعدد حقيقي موجب قطعا

1) تعريف

$$(\forall a>0)(\forall x\in\mathbb{R}):\ a^{x} = e^{x\ln(a)}$$

2) خاصيات

ليكن $a>0$ و $b>0$ و x و y من $\mathbb{R}$.

*) $a^{x+y} = a^{x}\cdot a^{y}$ $\qquad$ *) $a^{xy} = (a^{x})^{y}$

*) $a^{x-y} = \frac{a^{x}}{a^{y}}$ $\qquad$ *) $a^{x}b^{x} = (ab)^{x}$

*) $a^{-x} = \frac{1}{a^{x}}$ $\qquad$ *) $\frac{a^{x}}{b^{x}} = (\frac{a}{b})^{x}$

*) $a^{x} = a^{y} \Leftrightarrow x = y$

*) $\ln(a^{x}) = x\ln a$