✿ Baccalauréat S Spécialité ✿

Index des exercices de spécialité de 1999 à juin 2011

Tapuscrit : DENIS VERGÈS

N°	Lieu et date	Arithmétique	Espace Surfaces	Transformations
1	Polynésie juin 2011	×		
2	Métropole juin 2011	×		
3	La Réunion juin 2011			×
4	Centres étrangers juin 2011	×	×	×
5	Asie juin 2011	×	×	
6	Antilles–Guyane 2011	×		
7	Liban mai 2011			×
8	Amérique du Nord mai 2011	×		
9	Pondichéry avril 2011		×	
10	Amérique du Sud novembre 2010	×		
11	Nouvelle-Calédonie novembre 2010			×
12	La Réunion septembre 2010			×
13	Métropole septembre 2010			×
14	La Réunion septembre 2010	×		
15	La Réunion juin 2010			×
16	Métropole juin 2010			×
17	Centres étrangers juin 2010			×
18	Asie juin 2010			×
19	Antilles-Guyane juin 2010			×
20	Amérique du Nord juin 2010	×		×
21	Liban juin 2010	×		×
22	Pondichéry avril 2010	×		×
23	Nouvelle Calédonie novembre 2009	×		
24	Amérique du Sud novembre 2009			×
25	Antilles-Guyane septembre 2009	×	×	
26	Polynésie septembre 2009			×
27	Métropole septembre 2009	×		
28	Amérique du Nord juin 2009	×		
29	Liban juin 2009	×		
30	Polynésie juin 2009			×
31	Centres étrangers juin 2009	×	×	
32	Asie juin 2009	×		
33	Métropole juin 2009	×		
34	Antilles - Guyane juin 2009	×	×	
35	La Réunion juin 2009	×	×	
36	Pondichéry avril 2009	×	×	
37	Nouvelle–Calédonie décembre 2008			×
38	Amérique du Sud novembre 2008		×	

N°	Lieu et date	Arithmé-tique	Espace Surfaces	Transfor-mations
39	Métropole La Réunion septembre 2008	×		×
40	Antilles–Guyane septembre 2008	×		×
41	Polynésie juin 2008	×	×	×
42	La Réunion juin 2008	×		×
43	Métropole juin 2008	×		×
44	Centres étrangers juin 2008			×
45	Asie juin 2008	×		
46	Antilles-Guyane juin 2008	×		
47	Amérique du Nord mai 2008	×	×	
48	Liban mai 2008	×	×	×
49	Pondichéry avril 2008			×
50	Nouvelle-Calédonie mars 2008	×		
51	Nouvelle-Calédonie décembre 2007	×		
52	Amérique du Sud novembre 2007			×
53	Métropole-La Réunion septembre 2007			×
54	Antilles-Guyane septembre 2007			×
55	Polynésie juin 2007		×	
56	La Réunion juin 2007			×
57	Métropole juin 2007			×
58	Centres étrangers juin 2007			×
59	Asie juin 2007			×
60	Antilles-Guyane juin 2007			×
61	Amérique du Nord juin 2007			×
62	Liban juin 2007		×	×
63	Pondichéry avril 2007			×
64	Nlle-Calédonie mars 2007			×
65	Nlle-Calédonie novembre 2006			×
66	Amérique du Sud novembre 2006	×		
67	Métropole septembre 2006	×		
68	Polynésie juin 2006	×		
69	La Réunion juin 2006			×
70	Métropole juin 2006	×		
71	Centres étrangers juin 2006	×		
72	Asie juin 2006	×		
73	Antilles-Guyane juin 2006			×
74	Amérique du Nord juin 2006			×
75	Pondichéry avril 2006			×
76	Nlle-Calédonie novembre 2005	×		×
77	Amérique du Sud novembre 2005			×
78	Métropole septembre 2005	×		×
79	Amérique du Nord juin 2005			×
80	Antilles-Guyane juin 2005	×		

Nº	Lieu et date	Arithmé-tique	Espace Surfaces	Transfor-mations
81	Asie juin 2005			×
82	Centres étrangers juin 2005	×		
83	Métropole juin 2005			×
84	La Réunion juin 2005	×		
85	Liban juin 2005	×		
86	Polynésie juin 2005	×		
87	Pondichéry juin 2005			×
88	Nlle-Calédonie nov. 2004	×		
89	Amérique du Sud nov. 2004			×
90	Antilles septembre 2004	×		×
91	Métropole septembre 2004			×
92	Polynésie septembre 2004			×
93	Amérique du Nord mai 2004			×
94	Antilles-Guyane juin 2004			×
95	Asie juin 2004	×		
96	Centres étrangers juin 2004	×		
97	Métropole juin 2004	×		
98	Liban juin 2004			×
99	Polynésie juin 2004			×
100	Pondichéry avril 2004		×	
101	La Réunion juin 2004	×		
102	Amérique du Sud nov. 2003			×
103	Nouvelle Calédonie nov. 2003	×		
104	Antilles–Guyane sept. 2003	×		
105	Métropole septembre 2003	×		
106	Polynésie septembre 2003	×		
107	Amérique du Nord juin 2003			×
108	Antilles-Guyane juin 2003	×		
109	Asie juin 2003	×		
110	Centres étrangers juin 2003		×	
111	Métropole juin 2003	×	×	
112	La Réunion juin 2003			×
113	Liban juin 2003	×		
114	Polynésie juin 2003			×
115	Pondichéry juin 2003			×
116	Amérique du Sud déc. 2002	×		
117	Nouvelle Calédonie nov. 2002	×		
118	Antilles-Guyane sept. 2002			×
119	Métropole septembre 2002			×
120	Amérique du Nord juin 2002	×		
121	Antilles-Guyane juin 2002			×
122	Asie juin 2002	×		

N°	Lieu et date	Arithmé-tique	Espace Surfaces	Transfor-mations
123	Centres étrangers juin 2002	×		
124	Métropole juin 2002	×		
125	La Réunion juin 2002			×
126	Polynésie juin 2002	×		
127	Pondichéry juin 2002	×		
128	Nouvelle Calédonie déc. 2001	×		
129	Amérique du Sud déc. 2001	×		
130	Antilles-Guyane sept. 2001	×		
131	Métropole septembre 2001	×		
132	Polynésie septembre 2001			×
133	Amérique du Nord juin 2001	×		
134	Antilles-Guyane juin 2001	×		
135	Asie juin 2001			×
136	Centres étrangers juin 2001	×		
137	Métropole juin 2001			×
138	Liban juin 2001			×
139	Polynésie juin 2001	×		
140	Pondichéry juin 2001	×		
141	Nouvelle-Calédonie déc. 2000	×		
142	Amérique du Sud nov. 2000			×
143	Métropole septembre 2000			×
144	Polynésie septembre 2000			×
145	Amérique du Nord juin 2000			×
146	Antilles-Guyane juin 2000	×		×
147	Asie juin 2000	×		
148	Centres étrangers juin 2000			×
149	Métropole juin 2000			×
150	La Réunion juin 2000	×		
151	Liban juin 2000	×		×
152	Polynésie juin 2000	×		
153	Pondichéry juin 2000	×		
154	Nlle-Calédonie déc. 1999	×		
155	Amérique du Sud nov. 1999	×		
156	Antilles-Guyane sept. 1999			×
157	Métropole sept. 1999			×
158	Sportifs haut-niveau sept. 1999			×
159	Amérique du Nord juin 1999	×		
160	Antilles-Guyane juin 1999	×		
161	Asie juin 1999	×		
162	Centres étrangers juin 1999	×		
163	Métropole juin 1999	×		
164	Liban juin 1999	×		

N°	Lieu et date	Arithmétique	Espace Surfaces	Transformations
165	Pondichéry juin 1999	×		
166	Antilles-Guyane sept. 1998			×

1 Polynésie juin 2011

On rappelle la propriété, connue sous le nom de petit théorème de Fermat :
Si p est un nombre premier et a est un entier naturel non divisible par p, alors $a^{p-1} \equiv 1 \quad (\text{modulo} p)$.

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 10u_n + 21.$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. **1.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,
$3u_n = 10^{n+1} - 7$.

2. En déduire, pour tout entier naturel n, l' écriture décimale de u_nů

3. Montrer que u_2 est un nombre premier.

On se propose maintenant d'étudier la divisibilité des termes de la suite (u_n) par certains nombres premiers.

4. Démontrer que, pour tout entier naturel n, u_n n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5.

5. **1.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $3u_n \equiv 4 - (-1)^n \quad (\text{modulo} 11)$.

2. En déduire que, pour tout entier naturel n, u_n n'est pas divisible par 11.

6. **1.** Démontrer l'égalité : $10^{16} \equiv 1 (\text{modulo} 17)$.

2. En déduire que, pour tout entier naturel k, u_{16k+8} est divisible par 17.

2 Métropole juin 2011

PARTIE A - Restitution organisée de connaissances

On rappelle ci-dessous le théorème de BÉZOUT et le théorème de GAUSS.
Théorème de BÉZOUT :
Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si et seulement si, il existe un couple $(u\ ;\ v)$ d'entiers relatifs vérifiant $au + bv = 1$.

Théorème de GAUSS :
Soient a, b, c des entiers relatifs.
Si a divise le produit bc et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c.

1. En utilisant le théorème de BÉZOUT, démontrer le théorème de GAUSS.

2. Soient p et q deux entiers naturels tels que p et q sont premiers entre eux.
Déduire du théorème de GAUSS que, si a est un entier relatif, tel que $a \equiv 0 \quad [p]$ et $a \equiv 0 \quad [q]$, alors $a \equiv 0 \quad [pq]$.

PARTIE B

On se propose de déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des entiers relatifs n vérifiant le système :

$$\left\{\begin{array}{lcll} n & \equiv & 9 & [17] \\ n & \equiv & 3 & [5] \end{array}\right.$$

1. Recherche d'un élément de $\mathcal{S}$.
On désigne par $(u\ ;\ v)$ un couple d'entiers relatifs tel que $17u + 5v = 1$.

  1. Justifier l'existence d'un tel couple $(u\ ;\ v)$.

  2. On pose $n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v$.
  Démontrer que n_0 appartient à $\mathcal{S}$.

  3. Donner un exemple d'entier n_0 appartenant à $\mathcal{S}$.

2. Caractérisation des éléments de $\mathcal{S}$.

  1. Soit n un entier relatif appartenant à $\mathcal{S}$.
  Démontrer que $n - n_0 \equiv 0 \quad [85]$.

  2. En déduire qu'un entier relatif n appartient à $\mathcal{S}$ si et seulement si il peut s'écrire sous la forme $n = 43 + 85k$ où k est un entier relatif.

3. Application
Zoé sait qu'elle a entre 300 et 400 jetons.
Si elle fait des tas de 17 jetons, il lui en reste 9.
Si elle fait des tas de 5 jetons, il lui en reste 3.
Combien a-t-elle de jetons ?

3 La Réunion juin 2011

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$; unité graphique : 8 centimètres.
On considère la transformation f du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = \frac{\sqrt{2}}{4}(-1+\mathrm{i})z.$$

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f.

2. On définit la suite de points (M_n) de la façon suivante : M_0 est le point d'affixe $z_0 = 1$ et, pour tout nombre entier naturel n, $M_{n+1} = f(M_n)$. On note z_n l'affixe du point M_n.

1. Justifier que, pour tout nombre entier naturel n, $z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{3n\pi}{4}\right)}$

2. Construire les points $M_0,\ M_1,\ M_2,\ M_3$ et M_4.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative meme non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Soient n et p deux entiers naturels. À quelle condition sur n et p les points M_n et M_p sont-ils alignés avec l'origine O du repère ?

4 Centres étrangers juin 2011

Les cinq questions sont indépendantes.
Pour chaque question une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.
Toute justification complète sera valorisée.

Question 1
On considère l'équation (E) : $2x+11y=7$, où x et y sont des entiers relatifs.
Affirmation
Les seuls couples solutions de (E) sont les couples $(22k-2\ ;\ -4k+1)$, avec k appartenant à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

Question 2
On considère l'entier $N=11^{2011}$.
Affirmation
L'entier N est congru à 4 modulo 7.

Question 3
On considère, dans le plan complexe, les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a=1+\mathrm{i} \quad ; \quad b=3\mathrm{i} \quad ; \quad c=\left(1-2\sqrt{2}\right)+\mathrm{i}\left(1-\sqrt{2}\right).$$

Affirmation
Le point C est l'image du point B par la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

Question 4
On considère, dans le plan complexe, les points A et B d'affixes respectives :

$$a=1+\mathrm{i} \quad ; \quad b=2-\mathrm{i}.$$

Soit f la similitude d'écriture complexe : $z'=\left(-\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}\mathrm{i}\right)\overline{z}+\left(\dfrac{12}{5}+\dfrac{6}{5}\mathrm{i}\right)$.
Affirmation
La transformation f est la réflexion d'axe (AB).

Question 5
L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
On considère la surface $\mathscr{S}$ dont une équation est : $z=4xy$.
Affirmation
La section de la surface $\mathscr{S}$ par le plan d'équation $z=0$ est la réunion de deux droites orthogonales.

5 Asie juin 2011

Partie A : Restitution organisée de connaissances

1. Pré-requis : tout nombre entier n strictement supérieur à 1 admet au moins un diviseur premier.
   Démontrer que tout nombre entier n strictement supérieur à 1 est premier ou peut se décomposer en produit de facteurs premiers (on ne demande pas de démontrer l'unicité de cette décomposition).
2. Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de 629.

Partie B

Dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les surfaces Γ et C d'équations respectives : Γ : $z = xy$ et $C : x^2 + z^2 = 1$.

1. Donner la nature de la surface C et déterminer ses éléments caractéristiques.
2. Points d'intersection à coordonnées entières des surfaces Γ et C
   1. Démontrer que les coordonnées $(x~;~y~;~z)$ des points d'intersection de Γ et de C sont telles que :
   $$x^2\left(1+y^2\right) = 1.$$
   2. En déduire que Γ et C ont deux points d'intersection dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs.
3. Points d'intersection à coordonnées entières de Γ et d'un plan
   Pour tout nombre entier naturel non nul n, on désigne par P_n le plan d'équation $z = n^4 + 4$.
   1. Déterminer l'ensemble des points d'intersection de Γ et du plan P_1 dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs.

      Pour la suite de l'exercice, on suppose $n \geqslant 2$.
   2. Vérifier que : $\left(n^2 - 2n + 2\right)\left(n^2 + 2n + 2\right) = n^4 + 4$.
   3. Démontrer que, quel que soit le nombre entier naturel $n \geqslant 2$, $n^4 + 4$ n'est pas premier.
   4. En déduire que le nombre de points d'intersection de Γ et du plan P_n dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs est supérieur ou égal à 8.
   5. Déterminer les points d'intersection de Γ et du plan P_5 dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs.

6 Antilles–Guyane juin 2011

1. On considère l'équation (E) : $11x - 7y = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.

1. Justifier, en énonçant un théorème, qu'il existe un couple d'entiers relatifs $(u\ ;\ v)$ tels que $11u - 7v = 1$. Trouver un tel couple.
2. En déduire une solution particulière de l'équation (E).
3. Résoudre l'équation (E).
4. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, on considère la droite D d'équation cartésienne $11x - 7y - 5 = 0$. On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ du plan tels que $0 \leqslant x \leqslant 50$ et $0 \leqslant y \leqslant 50$.

   Déterminer le nombre de points de la droite D appartenant à l'ensemble $\mathscr{C}$ et dont les coordonnées sont des nombres entiers.

2. On considère l'équation (F) : $11x^2 - 7y^2 = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.

1. Démontrer que si le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de (F), alors $x^2 \equiv 2y^2 \pmod 5$.
2. Soient x et y des entiers relatifs. Recopier et compléter les deux tableaux suivants :

Modulo 5, x est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, x^2 est congru à					

Modulo 5, y est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, $2y^2$ est congru à					

   Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de x^2 et de $2y^2$ par 5 ?

3. En déduire que si le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de (F), alors x et y sont des multiples de 5.

3. Démontrer que si x et y sont des multiples de 5, alors le couple $(x\ ;\ y)$ n'est pas solution de (F). Que peut-on en déduire pour l'équation (F) ?

7 Liban mai 2011

Partie A : Restitution organisée de connaissances

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct.
Prérequis : L'écriture complexe d'une similitude directe est de la forme $z' = az + b$ où a et b sont deux nombres complexes tels que $a \neq 0$.

Démontrer que si A, B, A′ et B′ sont quatre points du plan tels que A $\neq$ B et A′ $\neq$ B′, alors il existe une unique similitude directe transformant A en A′ et B en B′.

Partie B

On considère le triangle rectangle isocèle ABC tel que $\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ modulo 2π.
On note D le symétrique de A par rapport au point C.
On désigne par s la similitude directe transformant D en C et C en B.

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude s.

2. On appelle Ω le centre de la similitude s.

  1. En utilisant la relation $\overrightarrow{\text{DC}} = \overrightarrow{\Omega\text{C}} - \overrightarrow{\Omega\text{D}}$, démontrer que $\text{DC}^2 = \Omega\text{D}^2$.

  2. En déduire la nature du triangle ΩDC.

3. On pose $\sigma = s \circ s$.

  1. Quelle est la nature de la transformation σ ? Préciser ses éléments caractéristiques.

  2. Déterminer l'image du point D par la transformation σ.

4. Démontrer que le quadrilatère ADΩB est un rectangle.

5. Dans cette question, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{A}\,;\, \vec{u}, \vec{v}\right)$, choisi de manière à ce que les points A, B, C et D aient comme affixes respectives 0, 1, i et 2i.

  1. Démontrer que l'écriture complexe de la similitude s est :
  $z' = (1+\text{i})z + 2 - \text{i}$ où z et z' désignent respectivement les affixes d'un point M et de son image M' par s.

  2. On note x et x', y et y' les parties réelles et les parties imaginaires de z et z'.
  Démontrer que $\left\{\begin{array}{l c l} x' & = & x - y + 2 \\ y' & = & x + y - 1 \end{array}\right.$

  3. Soit J le point d'affixe $1 + 3\text{i}$.
  Existe-t-il des points M du plan dont les coordonnées sont des entiers relatifs et tels que $\overrightarrow{\text{A}M'} \cdot \overrightarrow{\text{AJ}} = 0$, M' désignant l'image du point M par s ?

8 Amérique du Nord mai 2011

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

Partie B

On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat :
« Si p est un nombre premier et q un entier naturel premier avec p, alors
$q^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ ».
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1.$$

1. Calculer les six premiers termes de la suite.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est pair.
3. Montrer que, pour tout entier naturel n pair non nul, u_n est divisible par 4.
   On note (E) l'ensemble des nombres premiers qui divisent au moins un terme de la suite (u_n).
4. Les entiers 2, 3, 5 et 7 appartiennent-ils à l'ensemble (E) ?
5. Soit p un nombre premier strictement supérieur à 3.
   1. Montrer que : $6 \times 2^{p-2} \equiv 3 \pmod{p}$ et $6 \times 3^{p-2} \equiv 2 \pmod{p}$.
   2. En déduire que $6u_{p-2} \equiv 0 \pmod{p}$.
   3. Le nombre p appartient-il à l'ensemble (E) ?

9 Pondichéry avril 2011

Partie A

On considère, dans un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace, la surface $\mathcal{S}$ d'équation :

$$z = (x - y)^2.$$

1. On note $\mathcal{E}_1$ l'intersection de $\mathcal{S}$ avec le plan $\mathcal{P}_1$ d'équation $z = 0$.
Déterminer la nature de $\mathcal{E}_1$. On note $\mathcal{E}_2$ l'intersection de $\mathcal{S}$ avec le plan $\mathcal{P}_2$ d'équation $x = 1$.
Déterminer la nature de $\mathcal{E}_2$.

Partie B

On considère, dans un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace, la surface $\mathcal{S}'$ d'équation :

$$z = xy.$$

1. On note $\mathcal{E}_3$ l'intersection de $\mathcal{S}'$ avec le plan $\mathcal{P}_1$ d'équation $z = 0$.
Déterminer la nature de $\mathcal{E}_3$

2. On note $\mathcal{E}_4$ l'intersection de $\mathcal{S}'$ avec le plan $\mathcal{P}_3$ d'équation $z = 1$.
Déterminer la nature de $\mathcal{E}_4$.

Partie C

On note $\mathcal{E}_5$ l'intersection de $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{S}'$.
Dans cette partie, on souhaite démontrer que le seul point appartenant à $\mathcal{E}_5$ dont les coordonnées sont des entiers naturels est le point O(0 ; 0 ; 0).
On suppose qu'il existe un point M appartenant à $\mathcal{E}_5$ et dont les coordonnées x, y et z sont des entiers naturels.

1. Montrer que si $x = 0$, alors le point M est le point O.

2. On suppose dorénavant que l'entier x n'est pas nul.

   1. Montrer que les entiers x, y et z vérifient $x^2 - 3xy + y^2 = 0$.
   En déduire qu'il existe alors des entiers naturels x' et y' premiers entre eux tels que $x'^2 - 3x'y' + y'^2 = 0$.

   2. Montrer que x' divise y'^2, puis que x' divise y'.

   3. Établir que y' vérifie la relation $1 - 3y' + y'^2 = 0$.

   4. Conclure.

10 Amérique du Sud novembre 2010

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $A(n) = n^4 + 1$.
L'objet de l'exercice est l'étude des diviseurs premiers de $A(n)$.

1. Quelques résultats

1. Étudier la parité de l'entier $A(n)$.

2. Montrer que, quel que soit l'entier n, $A(n)$ n'est pas un multiple de 3.

3. Montrer que tout entier d diviseur de $A(n)$ est premier avec n.

4. Montrer que, pour tout entier d diviseur de $A(n)$:

$$n^8 \equiv 1 \qquad \text{mod } d.$$

2. Recherche de critères

Soit d un diviseur de $A(n)$. On note s le plus petit des entiers naturels non nuls k tels que $n^k \equiv 1$ mod d.

1. Soit k un tel entier. En utilisant la division euclidienne de k par s, montrer que s divise k.

2. En déduire que s est un diviseur de 8.

3. Montrer que si, de plus, d est premier, alors s est un diviseur de $d - 1$. On pourra utiliser le petit théorème de Fermat.

3. Recherche des diviseurs premiers de $A(n)$ dans le cas où n est un entier pair.

Soit p un diviseur premier de $A(n)$. En examinant successivement les cas $s = 1$, $s = 2$ puis $s = 4$, conclure que p est congru à 1 modulo 8.

4. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Appliquer ce qui précède à la recherche des diviseurs premiers de $A(12)$.

Indication : la liste des nombres premiers congrus à 1 modulo 8 débute par 17, 41, 73, 89, 97, 113, 137, ...

11 Nouvelle-Calédonie novembre 2010

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.
On considère la similitude indirecte f d'écriture complexe

$$z' = \left(1 + \text{i}\sqrt{3}\right)\overline{z}$$

où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z.
Soient les points A et B d'affixes respectives $z_{\text{A}} = \sqrt{6} + \text{i}\sqrt{2}$ et $z_{\text{B}} = -\sqrt{2} + \text{i}\sqrt{6}$.
On note A$'$ et B$'$ les images respectives des points A et B par f.

Une figure fournie en ANNEXE du sujet, sera complétée et rendue avec la copie. Les différentes constructions seront faites à la règle et au compas, et les traits de construction devront apparaître clairement.

1.
1. Écrire les affixes des points A et B sous forme exponentielle.
2. Montrer que le triangle OAB est rectangle isocèle direct.
3. En déduire la nature du triangle OA$'$B$'$.
4. Montrer que l'affixe $z_{\text{A}'}$ de A$'$ vérifie l'égalité : $z_{\text{A}'} = 2z_{\text{A}}$.
   En déduire la construction de A$'$ et B$'$.

2. On note r la rotation de centre O et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$, et s la symétrie orthogonale d'axe $\left(\text{O}\ ;\ \overrightarrow{u}\right)$. On pose $g = r \circ s$.
1. Déterminer l'écriture complexe de la transformation g.
2. Montrer que les points O et A sont invariants par g.
3. En déduire la nature de la transformation g.

3.
1. Montrer que l'on peut écrire $f = h \circ g$, où h est une homothétie de centre et de rapport à déterminer.
2. Sur la figure placée en **ANNEXE**, un point C est placé. Faire la construction de l'image C$'$ de C par la transformation f.

12 La Réunion septembre 2010

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$; unité graphique : 8 centimètres.
On considère la transformation f du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = \frac{\sqrt{2}}{4}(-1+\mathrm{i})z.$$

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f.

2. On définit la suite de points (M_n) de la façon suivante : M_0 est le point d'affixe $z_0 = 1$ et, pour tout nombre entier naturel n, $M_{n+1} = f(M_n)$. On note z_n l'affixe du point M_n.

   1. Justifier que, pour tout nombre entier naturel n, $z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{3n\pi}{4}\right)}$

   2. Construire les points $M_0,\ M_1,\ M_2,\ M_3$ et M_4.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative meme non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Soient n et p deux entiers naturels. À quelle condition sur n et p les points M_n et M_p sont-ils alignés avec l'origine O du repère ?

13 Métropole septembre 2010

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les deux rectangles OABC et DEFG où les points A, B, C, D, E, F, G ont pour affixes respectives

$$z_{\text{A}} = -2,\ z_{\text{B}} = -2 + \text{i},\ z_{\text{C}} = \text{i},\ z_{\text{D}} = 1,\ z_{\text{E}} = 1 + 3\text{i},\ z_{\text{F}} = \frac{5}{2} + 3\text{i}, z_{\text{G}} = \frac{5}{2}.$$

Voir la figure donnée en annexe 3.

1. On considère la similitude directe s transformant O en D et A en E.

   1. Justifier que l'écriture complexe de la similitude s est : $z' = -\frac{3}{2}\text{i}z + 1$.

   2. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude s.

   3. Quelle est l'image du rectangle OABC par la similitude s ?

2. On considère la similitude indirecte s' d'écriture complexe $z' = -\frac{2}{3}\text{i}\overline{z} + \frac{5}{3}\text{i}$.

   1. Déterminer l'image du rectangle DEFG par la similitude s'.

   2. On considère la similitude $g = s' \circ s$.
   Déterminer l'image du rectangle OABC par la similitude g.

   3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   La similitude g a-t-elle des points fixes ? Que peut-on en conclure pour g ?

14 Polynésie juin 2010

Retour au tableau

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

On considère l'équation (E) : $7x - 6y = 1$ où x et y sont des entiers naturels.

1. Donner une solution particulière de l'équation (E)
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels solutions de l'équation (E).

Partie B

Dans cette partie, on se propose de déterminer les couples $(n,\ m)$ d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation : $7^n - 3 \times 2^m = 1$ (F).

1. On suppose $m \leqslant 4$.
   Montrer qu'il y a exactement deux couples solutions.
2. On suppose maintenant que $m \geqslant 5$.
   1. Montrer que si le couple $(n,\ m)$ vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1 \pmod{32}$.
   2. En étudiant les restes de la division par 32 des puissances de 7, montrer que si le couple $(n,\ m)$ vérifie la relation (F) alors n est divisible par 4.
   3. En déduire que si le couple $(n,\ m)$ vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1 \pmod{5}$.
   4. Pour $m \geqslant 5$, existe-t-il des couples $(n,\ m)$ d'entiers naturels vérifiant la relation (F) ?
3. Conclure, c'est-à-dire déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation (F).

15 La Réunion juin 2010

Retour au tableau

Partie 1 : Restitution organisée de connaissances

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

Prérequis :

On rappelle que l'écriture complexe d'une similitude directe du plan est de la forme $z' = \alpha z + \beta$, où α est un nombre complexe non nul et β est un nombre complexe.
Soient A, B, C, D quatre points du plan ; on suppose d'une part que les points A et C sont distincts et d'autre part que les points B et D sont distincts.
Démontrer qu'il existe une unique similitude directe s telle que $s(\text{A}) = \text{B}$ et $s(\text{C}) = \text{D}$.

Partie II :

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{A}\ ;\ \overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AD}}\right)$; $\left(\overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AD}}\right) = \dfrac{\pi}{2}\quad [2\pi]$.
On considère le point C tel que ABCD est un carré.
Soit E le milieu du segment [AD], on considère le carré EDGF tel que $\left(\overrightarrow{\text{ED}},\ \overrightarrow{\text{EF}}\right) = \dfrac{\pi}{2}\quad [2\pi]$.

1.
   1. Faire une figure en plaçant les points A, B, C, D, E, F, G. On complètera la figure au cours de l'exercice.
   2. Préciser les nombres complexes $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g$, affixes respectives des points A, B, C, D, E, F et G.
   3. Montrer qu'il existe une unique similitude directe s du plan telle que $s(\text{D}) = \text{F}$ et $s(\text{B}) = \text{D}$.

2. On se propose de préciser les éléments caractéristiques de la similitude directe s.
   1. Déterminer le rapport k et l'angle θ de la similitude directe s.
   2. Donner l'écriture complexe de cette similitude.
   3. Déterminer, le centre Ω de la similitude directe s.

16 Métropole juin 2010

Retour au tableau

Dans tout l'exercice, $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ est un repère orthonormal direct du plan complexe (unité graphique : 4 cm).

On désigne par A le point d'affixe $z_{\text{A}} = 1$.

1. On considère la transformation T du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point d'affixe $-\overline{z}+2$.

   1. Déterminer les images respectives par la transformation T du point A et du point Ω d'affixe $1+\text{i}\sqrt{3}$.

   2. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation T.

   3. Déterminer l'image par la transformation T du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.

2. $\mathscr{C}'$ désigne le cercle de centre O$'$ d'affixe 2 et de rayon 1.

   1. Construire le point A$'$ appartenant au cercle $\mathscr{C}'$ tel que : $\left(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{O}'\text{A}'}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ [modulo 2π].

   2. À tout point M du cercle $\mathscr{C}$ d'affixe z, on associe le point M' du cercle $\mathscr{C}'$ d'affixe z' tel que : $\left(\overrightarrow{\text{O}M}, \overrightarrow{\text{O}'M'}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ [modulo 2π].

   Déterminer le module et un argument de $\dfrac{z'-2}{z}$. En déduire que $z' = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}z+2$.

   3. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de la transformation r qui à tout point M du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}z+2$.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

À tout point M du plan, on associe le point M_1 milieu du segment $[MM']$.

Quel est le lieu géométrique du point M_1 lorsque M décrit le cercle $\mathscr{C}$?

17 Centres étrangers juin 2010

Retour au tableau

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm, on considère les points A, B, C, M, N et P d'affixes respectives :

$$a = 1 + \text{i},\ b = -1 + 2\text{i},\ c = 2 + 3\text{i},\ m = 7 - 5\text{i},\ n = 5 - \text{i},\ p = 9 + \text{i}.$$

1.

1. Placer les points A, B, C, M, N et P dans le repère.

2. Calculer les longueurs des côtés des triangles ABC et NMP.

3. En déduire que ces deux triangles sont semblables.

Dans la suite de l'exercice, on se propose de mettre en évidence deux similitudes qui transforment le triangle ABC en le triangle MNP.

2. Une similitude directe

Soit s la similitude directe qui transforme le point A en N et le point B en P.

1. Montrer qu'une écriture complexe de la similitude s est :

$$z' = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}\text{i}\right)z + \frac{23}{5} + \frac{9}{5}\text{i}.$$

2. Déterminer le rapport, la valeur de l'angle arrondie au degré, ainsi que le centre de la similitude s.

3. Vérifier que la similitude s transforme le point C en M.

3. Une similitude indirecte

Soit s' la similitude dont l'écriture complexe est :

$$z' = 2\text{i}\overline{z} + 3 - 3\text{i}.$$

1. Vérifier que : $\left\{\begin{array}{lcl} s'(A) & = & N \\ s'(B) & = & M \\ s'(C) & = & P \end{array}\right.$

2. Démontrer que s' admet un unique point invariant K d'affixe $k = 1 - \text{i}$.

3. Soit h l'homothétie de centre K et de rapport $\frac{1}{2}$ et J le point d'affixe 2.

On pose : $f = s' \circ h$.

Déterminer les images des points K et J par la transformation f. En déduire la nature précise de la transformation f.

4. Démontrer que la similitude s' est la composée d'une homothétie et d'une réflexion.

18 Asie juin 2010

Retour au tableau

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{A}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$. L'unité graphique est 1 cm.
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
On considère les points B, C et H d'affixes respectives :

$$b = 5\text{i},\quad c = 10\quad \text{et}\quad h = 2+4\text{i}.$$

Construire une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

1. Étude de la position du point H

1. Démontrer que le point H appartient à la droite (BC).

2. Calculer $\dfrac{h}{h-c}$, et en déduire que $\left(\overrightarrow{\text{HC}},\overrightarrow{\text{HA}}\right) = -\dfrac{\pi}{2}\quad[2\pi]$.

2. Étude d'une première similitude

1. Calculer les rapports : $\dfrac{\text{BH}}{\text{AH}}$, $\dfrac{\text{BA}}{\text{AC}}$ et $\dfrac{\text{AH}}{\text{CH}}$.

2. Démontrer qu'il existe une similitude directe S_1 qui transforme le triangle CHA en le triangle AHB.

3. Déterminer l'écriture complexe de cette similitude S_1 ainsi que ses éléments caractéristiques.

3. Étude d'une seconde similitude
Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiatives, même infructueuses, sera prise en compte dans l'évaluation
On note S_2 la similitude qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = (-1-2\text{i})\overline{z} + 10.$$

Démontrer que S_2 est composée d'une symétrie orthogonale d'axe (Δ), et d'une similitude directe dont le centre Ω appartient à (Δ). Préciser (Δ).

4. Étude d'une composée

1. Calculer le rapport de la similitude composée $S_2 \circ S_1$.

2. En déduire le rapport entre les aires des triangles CHA et BAC.

19 Antilles-Guyane juin 2010

Retour au tableau

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité 1 cm.

1. Restitution organisée de connaissances

On utilisera sans démonstration les deux propriétés suivantes :

Propriété 1 : Toute similitude indirecte qui transforme un point M d'affixe z en un point M' d'affixe z' admet une expression complexe de la forme $z' = a\overline{z} + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Propriété 2 : Soit C une point d'affixe c. Pour tout point D, distinct de C, d'affixe d et pour tout point E, distinct de C, d'affixe e, on a :

$$\left(\overrightarrow{CD}\ ;\ \overrightarrow{CE}\right) = \arg\left(\frac{e-c}{d-c}\right)\quad (2\pi).$$

Question : Montrer qu'une similitude indirecte transforme un angle orienté en son opposé.

2. Soient les points C et D d'affixes respectives $c = 3$ et $d = 1 - 3\text{i}$, et $\mathscr{S}_1$ la similitude qui à tout point M du plan associe le point M_1 symétrique de M par rapport à l'axe $\left(\text{O}\ ;\ \vec{u}\right)$ des réels.

1. Placer les points C et D puis leurs images respectives C_1 et D_1 par $\mathscr{S}_1$. On complètera le figure au fur et à mesure de l'exercice.
2. Donner l'expression complexe de $\mathscr{S}_1$.

3. Soit $\mathscr{S}_2$ la similitude directe définie par :

- le point C_1 et son image C' d'affixe $c' = 1 + 4\text{i}$;
- le point D_1 et son image D' d'affixe $d' = -2 + 2\text{i}$.

1. Montrer que l'expression complexe de $\mathscr{S}_2$ est : $z' = \text{i}z + 1 + \text{i}$.
2. En déduire les éléments caractéristiques de cette similitude.

4. Soit $\mathscr{S}$ la similitude définie par $\mathscr{S} = \mathscr{S}_2 \circ \mathscr{S}_1$.

Déterminer l'expression complexe de $\mathscr{S}$.

5. On pourra admettre désormais que $\mathscr{S}$ est la similitude indirecte d'expression complexe :

$$z' = \text{i}\overline{z} + 1 + \text{i}.$$

1. Quelle est l'image de C par $\mathscr{S}$? Quelle est l'image de D par $\mathscr{S}$?
2. Soit H le point d'affixe h tel que : $h - c = \text{e}^{i\frac{\pi}{3}}(d - c)$.
   Montrer que le triangle CDH est équilatéral direct.
3. Soit H' l'image de H par $\mathscr{S}$. Préciser la nature du triangle $C'D'H'$ et construire le point H' (on ne demande pas de calculer l'affixe h' du point H').

20 Amérique du Nord juin 2010

Retour au tableau

Partie A

On cherche l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x,\ y)$ solutions de l'équation

$$(\mathrm{E}) : \quad 16x - 3y = 4.$$

1. Vérifier que le couple (1 ; 4) est une solution parliculière de (E).

2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On considère la transformation f du plan, qui à tout point M d' affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{3\mathrm{i}\pi}{8}} z.$$

On définit une suite de points (M_n) de la manière suivante :
le point M_0 a pour afflxe $z_0 = \mathrm{i}$ et pour tout entier naturel $n,\ M_{n+1} = f\left(M_n\right)$.
On note z_n l'affixe du point M_n.
Les points M_0, M_1, M_2 et M_3 sont placés sur la figure donnée en annexe page 6.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f.

2. On note g la transformation $f \circ f \circ f \circ f$.

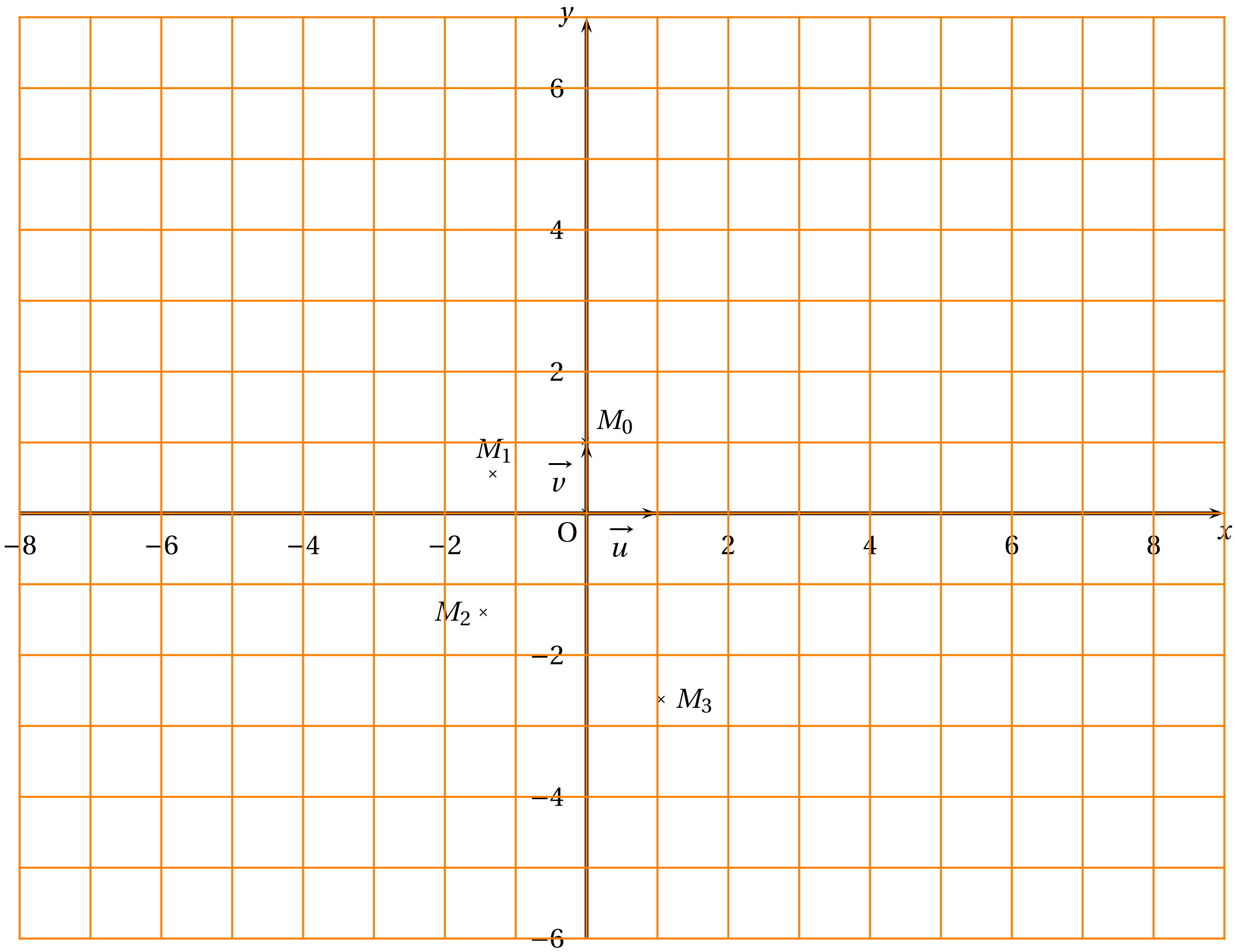
1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation g.
2. En déduire que pour tout entier naturel n, $\mathrm{O}M_{n+4} = 4\mathrm{O}M_n$ et que $\left(\overrightarrow{\mathrm{O}M_n}\ ,\ \overrightarrow{\mathrm{O}M_{n+4}}\right) = -\dfrac{\pi}{2} + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif.
3. Compléter la figure en construisant les points M_4, M_5 et M_6.

3. Démontrer que pour tout entier naturel $n,\ z_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3n\pi}{8}\right)}$.

4. Soient deux entiers naturels n et p tels que $p \leqslant n$.

1. Exprimer en fonction de n et p une mesure de $\left(\overrightarrow{\mathrm{O}M_p}\ ,\ \overrightarrow{\mathrm{O}M_n}\right)$.
2. Démontrer que les points O, M_p et M_n sont alignés si et seulement si $n - p$ est un multiple de 8.

5. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que le point M_n appartienne à la demi-droite $[\mathrm{O}x)$. On pourra utiliser la partie A.



y
6
4
2
M_0
M_1
$\vec{v}$
-8
-6
-4
-2
O
$\vec{u}$
2
4
6
8
x
M_2
-2
M_3
-4
-6

21 Liban juin 2010

Retour au tableau

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, le point A d'affixe $2-\text{i}$ et B l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
On note I le milieu du segment [AB].
Proposition 1 : « La similitude directe de centre A qui transforme I en O a pour écriture complexe $z' = (1+\text{i})z - 1 - 2\text{i}$. »

2. On appelle S l'ensemble des couples $(x\ ;\ y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation $3x - 5y = 2$.
Proposition 2 : « L'ensemble S est l'ensemble des couples $(5k-1\ ;\ 3k-1)$ où k est un entier relatif. »

3. On considère l'équation (E) : $x^2 + y^2 = 0 \quad$ modulo 3, où $(x\ ;\ y)$ est un couple d'entiers relatifs.
Proposition 3 : « Il existe des couples $(x\ ;\ y)$ d'entiers relatifs solutions de (E) qui ne sont pas des couples de multiples de 3. »

4. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Proposition 4 : « Pour tout entier naturel k $(2 \leqslant k \leqslant n)$, le nombre $n! + k$ n'est pas un nombre premier. »

5. On considère l'équation (E$'$) : $x^2 - 52x + 480 = 0$, où x est un entier naturel.
Proposition 5 : « Il existe deux entiers naturels non nuls dont le PGCD et le PPCM sont solutions de l'équation (E$'$). »

22 Pondichéry avril 2010

Retour au tableau

Les parties A et B peuvent, dans leur quasi-totalité, être traitées de façon indépendante.

Partie A

Dans cette partie, on se propose d'étudier des couples $(a,\ b)$ d'entiers strictement positifs, tels que :

$$a^2 = b^3$$

Soit $(a,\ b)$ un tel couple et $d = \text{PGCD}(a,\ b)$. On note u et v les entiers tels que $a = du$ et $b = dv$.

1. Montrer que $u^2 = dv^3$.

2. En déduire que v divise u, puis que $v = 1$.

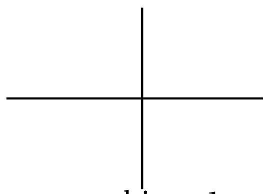
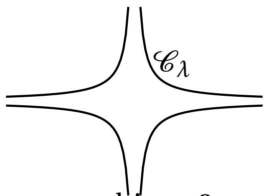
3. Soit $(a,\ b)$ un couple d'entiers strictement positifs.
Démontrer que l'on a $a^2 = b^3$ si et seulement si a et b sont respectivement le cube et le carré d'un même entier.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse. sera prise en compte dans l'évaluation.*
Montrer que si n est le carré d'un nombre entier naturel et le cube d'un autre entier, alors $n \equiv 0 \quad [7]$ ou $n \equiv 1 \quad [7]$.

Partie B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on considère la surface S d'équation $x^2 \times y^2 = z^3$.
Pour tout réel λ, on note $\mathcal{C}_\lambda$ la section de S par le plan d'équation $z = \lambda$.

1. Les graphiques suivants donnent l'allure de $\mathcal{C}_\lambda$ tracée dans le plan d'équation $z = \lambda$, selon le signe de λ.
Attribuer à chaque graphique l'un des trois cas suivants : $\lambda < 0$, $\lambda = 0, \lambda > 0$, et justifier l'allure de chaque courbe.

	(pas de courbe visible)	
graphique 1	graphique 2	graphique 3

2.
  1. Déterminer le nombre de points de $\mathcal{C}_{25}$ dont les coordonnées sont des nombres entiers strictement positifs.
  2. *Pour cette question, on pourra éventuellement s'aider de la question* 3 *de la partie A.*
     Déterminer le nombre de points de $\mathcal{C}_{2010}$ dont les coordonnées sont des nombres entiers strictement positifs

23 Nouvelle Calédonie novembre 2009

Retour au tableau

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

Soit n un entier naturel non nul.

1. On considère l'équation notée (E) : $3x + 7y = 10^{2n}$ où x et y sont des entiers relatifs.

   1. Déterminer un couple $(u\ ;\ v)$ d'entiers relatifs tels que $3u + 7v = 1$.
   En déduire une solution particulière $\left(x_0\ ;\ y_0\right)$ de l'équation (E).

   2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x\ ;\ y)$ solutions de (E).

2. On considère l'équation notée (G)

$$3x^2 + 7y^2 = 10^{2n} \text{ où } x \text{ et } y \text{ sont des entiers relatifs.}$$

   1. Montrer que $100 \equiv 2$ (modulo 7).
   Démontrer que si $(x\ ;\ y)$ est solution de (G) alors $3x^2 \equiv 2^n$ (modulo 7).

   2. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne de x par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division euclidienne de $3x^2$ par 7.							

   3. Démontrer que 2^n est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7.
   En déduire que l'équation (G) n'admet pas de solution.

24 Amérique du Sud novembre 2009

Retour au tableau

On considère un carré direct ABCD (c'est à dire un carré ABCD tel que :
$\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$) de centre I.

Soit J, K et L les milieux respectifs des segments [AB], [CD] et [DA].
Γ_1 désigne le cercle de diamètre [AI] et Γ_2 désigne le cercle de diamètre [BK].

Partie A

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe s telle que $s(\text{A}) = \text{I}$ et $s(\text{B}) = \text{K}$.

2. Montrer que les cercles Γ_1 et Γ_2 se coupent en deux points distincts : le point J et le centre Ω de la similitude directe s.

3. **a.** Déterminer les images par s des droites (AC) et (BC). En déduire l'image du point C par s.

b. Soit E l'image par s du point I. Démontrer que E est le milieu du segment [ID].

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Démontrer que les points A, Ω et E sont alignés.
(On pourra considérer la transformation $t = s \circ s$).

Partie B

Désormais, on considère que le côté du carré mesure 10 unités et on se place dans le repère orthonormé direct $\left(\text{A}\ ;\ \dfrac{1}{10}\overrightarrow{AB}\ ;\ \dfrac{1}{10}\overrightarrow{AD}\right)$.

1. Donner les affixes des points A, B, C et D.

2. Démontrer que la similitude directe s a pour écriture complexe

$$z' = \frac{\text{i}}{2}z + 5 + 5\text{i}.$$

3. Calculer l'affixe ω du centre Ω de s.

4. Calculer l'affixe z_{E} du point E et retrouver l'alignement des points A, Ω et E.

5. Démontrer que les droites (AE), (CL) et (DJ) sont concourantes au point Ω.

25 Antilles - Guyane septembre 2009

Retour au tableau

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère la surface S_1 d'équation $z = x^2 + y^2$, et la surface S_2 d'équation $z = xy + 2x$.

PARTIE A

On note $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x = 2$, E_1 l'intersection de la surface S_1 et du plan $\mathcal{P}$ et E_2 l'intersection de la surface S_2 et du plan $\mathcal{P}$.
En **annexe**, le plan $\mathcal{P}$ est représenté muni du repère $\left(\text{A} ; \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ où A est le point de coordonnées (2 ; 0 ; 0).

1.
  1. Déterminer la nature de l'ensemble E_1.
  2. Déterminer la nature de l'ensemble E_2.

2.
  1. Représenter les ensembles E_1 et E_2 sur la feuille **annexe**.
  2. Dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ donner les coordonnées des points d'intersection B et C des ensembles E_1 et E_2.

PARTIE B

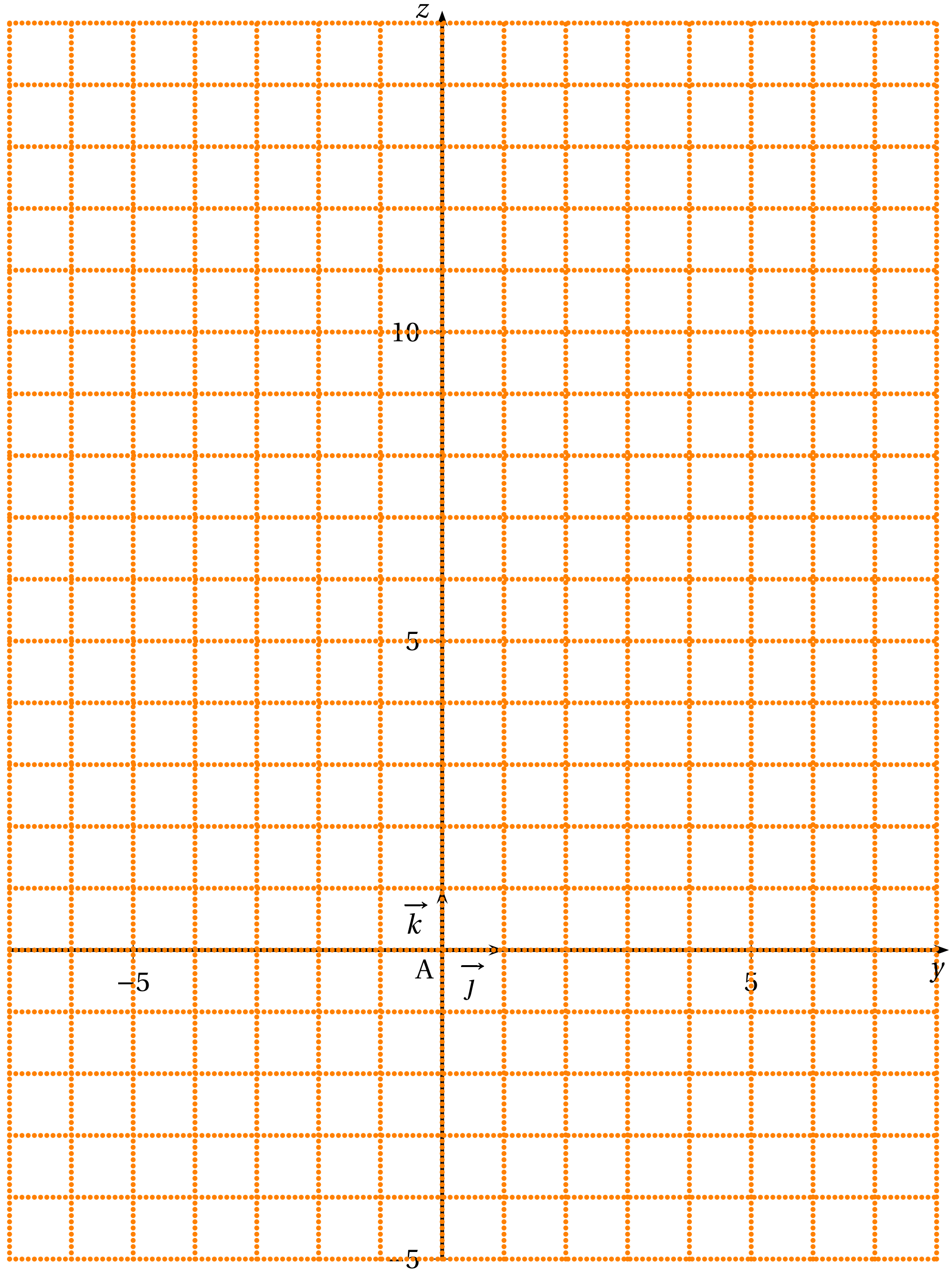
On pourra utiliser sans démonstration la propriété suivante :
« *soient a, b et c des entiers avec a premier. Si a divise bc alors a divise b ou a divise c.* »

L'objectif de cette partie est de déterminer les points d'intersection $M(x ; y ; z)$ des surfaces S_1 et S_2 où y et z sont des entiers relatifs et x un nombre premier.
On considère un tel point $M(x ; y ; z)$.

1.
  1. Montrer que $y(y - x) = x(2 - x)$.
  2. En déduire que le nombre premier x divise y.

2. On pose $y = kx$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
  1. Montrer que x divise 2, puis que $x = 2$.
  2. En déduire les valeurs possibles de k.

3. Déterminer les coordonnées possibles de M et comparer les résultats avec ceux de la PARTIE A, question 2. b.


z
10
5
$\vec{k}$
A
$\vec{j}$
−5
5
y
−5

26 Polynésie septembre 2009

Retour au tableau

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, unité graphique : 2 cm.
On appelle (Γ) le cercle de centre O et de rayon 1.

On fera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.

On appelle F l'application du plan P privé du point O dans P qui, à tout point M différent de O, d'affixe z, associe le point $M' = F(M)$ d'affixe z' définie par :

$$z' = z + \text{i} - \frac{1}{z}.$$

1. On considère les points A et B d'affixes respectives $a = \text{i}$ et $b = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}$ et leurs images A$'$ et B$'$ par F d'affixes respectives a' et b'.

1. Calculer a' et b'.
2. Placer les points A, A$'$ B et B$'$.
3. Démontrer que $\dfrac{-b}{b'-b} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\text{i}$.
4. En déduire la nature du triangle OBB$'$.

2. On recherche l'ensemble (E) des points du plan P privé du point O qui ont pour image par F, le point O.

1. Démontrer que, pour tout nombre complexe z,

$$z^2 + \text{i}z - 1 = \left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\text{i}\right)\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\text{i}\right).$$

2. En déduire les affixes des points de l'ensemble (E).
3. Démontrer que les points de (E) appartiennent à (Γ).

3. Soit θ un réel.

1. Démontrer que si $z = \text{e}^{\text{i}\theta}$ alors $z' = (2\sin\theta + 1)\text{i}$.
2. En déduire que si M appartient au cercle (Γ) alors M' appartient au segment [A$'$C] où C a pour affixe $-\text{i}$.

27 Métropole septembre 2009

Retour au tableau

1.

1. Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2 009 par 11.
2. Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2^{10} par 11.
3. Déterminer le reste dans la division euclidienne de $2^{2\,009} + 2\,009$ par 11.

2. On désigne par p un nombre entier naturel. On considère pour tout entier naturel non nul n le nombre $A_n = 2^n + p$.
On note d_n le PGCD de A_n et A_{n+1}.

1. Montrer que d_n divise 2^n.
2. Déterminer la parité de A_n en fonction de celle de p. Justifier.
3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Déterminer la parité de d_n en fonction de celle de p.
   En déduire le PGCD de $2^{2\,009} + 2\,009$ et $2^{2\,010} + 2\,009$.

28 Amérique du Nord juin 2009

Retour au tableau

Soit A l'ensemble des entiers naturels de l'intervalle $[1~;~46]$.

1. On considère l'équation

$$(E) : \quad 23x + 47y = 1$$

où x et y sont des entiers relatifs.

1. Donner une solution particulière $\left(x_0,~y_0\right)$ de (E).

2. Déterminer l'ensemble des couples $(x,~y)$ solutions de (E).

3. En déduire qu'il existe un unique entier x appartenant à A tel que $23x \equiv 1 \quad (47)$.

2. Soient a et b deux entiers relatifs.

1. Montrer que si $ab \equiv 0 \quad (47)$ alors $a \equiv 0 \quad (47))$ ou $b \equiv 0 \quad (47)$.

2. En déduire que si $a^2 \equiv 1 \quad (47)$ alors $a \equiv 1 \quad (47)$ ou a $a \equiv -1 \quad (47)$.

3. **1.** Montrer que pour tout entier p de A, il existe un entier relatif q tel que $p \times q \equiv 1 \quad (47)$.
Pour la suite, on admet que pour tout entier p de A, il existe un unique entier, noté $inv(p)$, appartenant à A tel que $p \times inv(p) \equiv 1 \quad (47)$.

Par exemple :

$inv(1) = 1$ car $1 \times 1 \equiv 1 \quad (47)$, $inv(2) = 24$ car $2 \times 24 \equiv 1 \quad (47)$,

$inv(3) = 16$ car $3 \times 16 = \equiv 1 \quad (47)$.

2. Quels sont les entiers p de A qui vérifient $p = inv(p)$?

3. Montrer que $46! \equiv -1 \quad (47)$.

29 Liban juin 2009

Retour au tableau

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un entier naturel n dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009, c'est-à-dire tel que $n^3 \equiv 2009 \mod 10000$.

Partie A

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de $2\,009^2$ par 16.

2. En déduire que $2\,009^{8\,001} \equiv 2009 \mod 16$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2\,009^2 - 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1$.

1. **1.** Démontrer que u_0 est divisible par 5.

2. Démontrer, en utilisant la formule du binôme de Newton, que pour tout entier naturel n,

$$u_{n1} = u_n\left[u_n^4 + 5\left(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1\right)\right].$$

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n est divisible par 5^{n+1}.

2. **1.** Vérifier que $u_3 = 2\,009^{250} - 1$ puis en déduire que $2\,009^{250} \equiv 1 \mod 625$.

2. Démontrer alors que $2\,009^{8\,001} \equiv 2\,009 \mod 625$.

Partie C

1. En utilisant le théorème de Gauss et les résultats établis dans les questions précédentes, montrer que $2\,009^{8\,001} - 2\,009$ est divisible par $10\,000$.

2. Conclure, c'est-à-dire déterminer un entier naturel dont l'écriture décimale du cube se termine par 2 009.

30 Polynésie juin 2009

Retour au tableau

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct.
On supposera connu le résultat suivant :
Une application f du plan dans lui-même est une similitude directe si et seulement si f admet une écriture complexe de la forme $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C} - \{0\}$ et $b \in \mathbb{C}$.
Démontrer que si A, B, A$'$ et B$'$ sont quatre points teIs que A est distinct de B et A$'$ est distinct de B$'$, alors il existe une unique similitude directe transformant A en A$'$ et B en B$'$.

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, unité graphique 2 cm.
On note A, B, C, D et E les points d'affixes respectives

$$z_{\text{A}} = 2\text{i},\ z_{\text{B}} = 2,\ z_{\text{C}} = 4+6\text{i},\ z_{\text{D}} = -1+\text{i}\ \text{ et }\ z_{\text{E}} = -3+3\text{i}.$$

1. Placer les points sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure des questions.

2. Déterminer la nature du triangle ABC.

3. Soit f la similitude plane directe telle que $f(\text{A}) = \text{D}$ et $f(\text{B}) = \text{A}$.

   1. Donner l'écriture complexe de f.

   2. Déterminer l'angle, le rapport et le centre Ω de cette similitude.

   3. Montrer que le triangle DAE est l'image du triangle ABC par la similitude f.

   4. En déduire la nature du triangle DAE.

4. On désigne par (Γ_1) le cercIe de diamètre [AB] et par (Γ_2) le cercle de diamètre [AD].
On note M le second point d'intersection du cercle (Γ_1) et de la droite (BC), et N le second point d'intersection du cercle (Γ_2) et de la droite (AE).

   1. Déterminer l'image de M par la similitude f.

   2. En déduire la nature du triangle ΩMN.

   3. Montrer que $M\text{B} \times N\text{E} = M\text{C} \times N\text{A}$.

31 Centres étrangers juin 2009

Retour au tableau

1. On note (E) l'équation $3x+2y=29$ où x et y sont deux nombres entiers relatifs.

1. Déterminer un couple d'entiers solution de l'équation (E).

2. Déterminer tous les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

3. Préciser les solutions de l'équation (E) pour lesquelles on a à la fois $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$;

2. Intersections d'un plan avec les plans de coordonnées
L'espace est muni du repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$ et on désigne par $\mathcal{P}$ le plan d'équation $3x+2y=29$.

1. Démontrer que $\mathcal{P}$ est parallèle à l'axe (Oz) de vecteur directeur $\vec{k}$.

2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection du plan $\mathcal{P}$ avec les axes (Ox) et (Oy) de vecteurs directeurs respectifs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

3. Faire une figure et tracer les droites d'intersection du plan $\mathcal{P}$ avec les trois plans de coordonnées.

4. Sur la figure précédente, placer sur la droite d'intersection des plans $\mathcal{P}$ et (xOy), les points dont les coordonnées sont à la fois entières et positives.

3. Étude d'une surface
$\mathcal{S}$ est la surface d'équation $4z = xy$ dans le repère $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$.
Les figures suivantes représentent les intersections de $\mathcal{S}$ avec certains plans de l'espace.

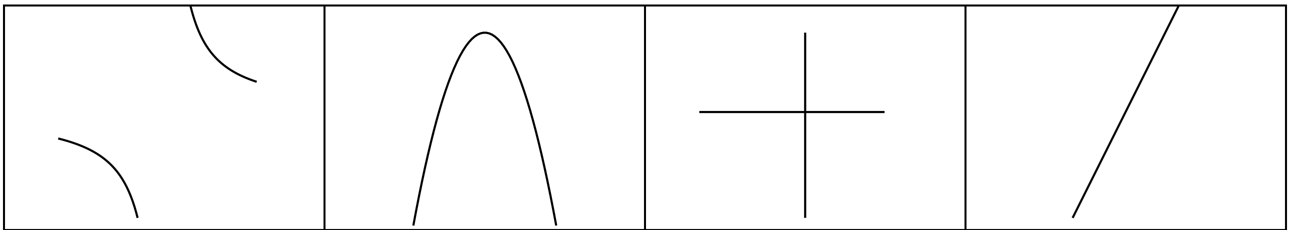


figure n° 1	figure n° 2	figure n° 3	figure n° 4

1. S_1 désigne la section de la surface $\mathcal{S}$ par le plan (xOy).
Une des figures données représente S_1 laquelle ?

2. S_2 désigne la section de $\mathcal{S}$ par le plan $\mathcal{R}$ d'équation $z=1$.
Une des figures données représente S_2, laquelle ?

3. S_3 désigne la section de $\mathcal{S}$ par le plan d'équation $y=8$.
Une des figures données représente S_3, laquelle ?

4. S_4 désigne la section de $\mathcal{S}$ par le plan $\mathcal{P}$ d'équation $3x+2y=29$ de la question 2.
Déterminer les coordonnées des points communs à S_4 et $\mathcal{P}$ dont l'abscisse x et l'ordonnée y sont des entiers naturels vérifiant l'équation
$3x+2y=29$.

32 Asie juin 2009

Retour au tableau

1. On se propose, dans cette question, de déterminer tous les entiers relatifs N tels que

$$\left\{\begin{array}{l c c l}N & \equiv & 5 & (13)\\N & \equiv & 1 & (17)\end{array}\right.$$

1. Vérifier que 239 est solution de ce système.
2. Soit N un entier relatif solution de ce système.
   Démontrer que N peut s'écrire sous la forme $N = 1+17x = 5+13y$ où x et y sont deux entiers relatifs vérifiant la relation $17x - 13y = 4$.
3. Résoudre l'équation $17x - 13y = 4$ où x et y sont des entiers relatifs.
4. En déduire qu'il existe un entier relatif k tel que $N = 18 + 221k$.
5. Démontrer l'équivalence entre $N \equiv 18 \quad (221)$ et $\left\{\begin{array}{l c c l}N & \equiv & 5 & (13)\\N & \equiv & 1 & (17)\end{array}\right.$.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infruxtueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

1. Existe-t-il un entier naturel k tel que $10^k \equiv 1 \quad (17)$?
2. Existe-t-il un entier naturel l tel que $10^l \equiv 18 \quad (221)$?

33 Métropole juin 2009

Retour au tableau

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1.

1. Déterminer l'ensemble des couples (x,y) de nombres entiers relatifs, solution de l'équation (E) : $8x - 5y = 3$.
2. Soit m un nombre entier relatif tel qu'il existe un couple $(p,\ q)$ de nombres entiers vérifiant $m = 8p + 1$ et $m = 5q + 4$.
   Montrer que le couple $(p,\ q)$ est solution de l'équation (E) et en déduire que $m \equiv 9 \pmod{40}$.
3. Déterminer le plus petit de ces nombres entiers m supérieurs à 2 000.

2.

1. Démontrer que pour tout nombre entier naturel k on a : $2^{3k} \equiv 1 \pmod{7}$.
2. Quel est le reste dans la division euclidienne de 2^{2009} par 7 ?

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Soient a et b deux nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 avec $a \neq 0$.

On considère le nombre $N = a \times 10^3 + b$. On rappelle qu'en base 10 ce nombre s'écrit sous la forme $N = \overline{a00b}$.

On se propose de déterminer parmi ces nombres entiers naturels N ceux qui sont divisibles par 7.

1. Vérifier que $10^3 \equiv -1 \pmod{7}$.
2. En déduire tous les nombres entiers N cherchés.

34 Antilles-Guyane juin 2009

Retour au tableau

Dans chacun des cas suivants, indiquer si l'affirmation proposée est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = (1 + i\sqrt{3})z + 2\sqrt{3}$.
On note A le point d'affixe $2i$.

Affirmation : f est la similitude directe, de centre A, d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de rapport 2.

2. **Affirmation :** $1991^{2009} \equiv 2\ (7)$.

3. a et b sont deux entiers relatifs quelconques, n et p sont deux entiers naturels premiers entre eux.

Affirmation : $a \equiv b\ (p)$ si et seulement si $na \equiv nb\ (p)$.

4. L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
$\mathscr{E}$ est l'ensemble des points M de l'espace dont les coordonnées $(x ; y ; z)$ vérifient l'équation : $z = x^2 + y^2$. On note $\mathscr{S}$ la section de $\mathscr{E}$ par le plan d'équation $y = 3$.

Affirmation : $\mathscr{S}$ est un cercle.

5. L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
$\mathscr{P}$ est la surface d'équation $x^2 + y^2 = 3z^2$.

Affirmation : O le seul point d'intersection de $\mathscr{P}$ avec le plan (yOz) à coordonnées entières.

35 La Réunion juin 2009

Retour au tableau

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

1. Soient F le point de coordonnées $\left(0\ ;\ 0\ ;\ \dfrac{1}{4}\right)$ et P le plan d'équation $z = -\dfrac{1}{4}$.

On note $d(M,\ P)$ la distance d'un point M au plan P.

Montrer que l'ensemble (S) des points M de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ qui vérifient $d(M,\ P) = M\mathrm{F}$ a pour équation $x^2 + y^2 = z$.

2.
1. Quelle est la nature de l'intersection de l'ensemble (S) avec le plan d'équation $z = 2$?
2. Quelle est la nature de l'intersection de l'ensemble (S) avec le plan d'équation $x = 0$?
   Représenter cette intersection dans le repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

3. Dans cette question, x et y désignent des nombres entiers naturels.

1. Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de x^2 par 7 ?
2. Démontrer que 7 divise $x^2 + y^2$ si et seulement si 7 divise x et 7 divise y.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Existe-t-il des points qui appartiennent à l'intersection de l'ensemble (S) et du plan d'équation $z = 98$ et dont toutes les coordonnées sont des entiers naturels ? Si oui les déterminer.

36 Pondichéry avril 2009

Retour au tableau

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 2 cm. Soit A et B les points d'affixes respectives $z_{\text{A}} = \text{i}$ et
$z_{\text{B}} = 1 + 2\text{i}$.

1. Justifier qu'il existe une unique similitude directe S telle que :

$$S(\text{O}) = \text{A} \text{ et } S(\text{A}) = \text{B}.$$

2. Montrer que l'écriture complexe de S est :

$$z' = (1 - \text{i})z + \text{i}.$$

Préciser les éléments caractéristiques de S (on notera Ω le centre de S).
On considère la suite de points (A_n) telle que :

- A_0 est l'origine du repère et,
- pour tout entier naturel n, $A_{n+1} = S(A_n)$.

On note z_n, l'affixe de A_n. (On a donc $A_0 = \text{O}$, $A_1 = \text{A}$ et $A_2 = \text{B}$).

3.
1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $z_n = 1 - (1 - \text{i})^n$.
2. Déterminer, en fonction de n, les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\Omega A_n}$ et $\overrightarrow{A_n A_{n+1}}$.
   Comparer les normes de ces vecteurs et calculer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{A_n A_{n+1}}\right)$.
3. En déduire une construction du point A_{n+1} connaissant le point A_n.
   Construire les points A_3 et A_4.

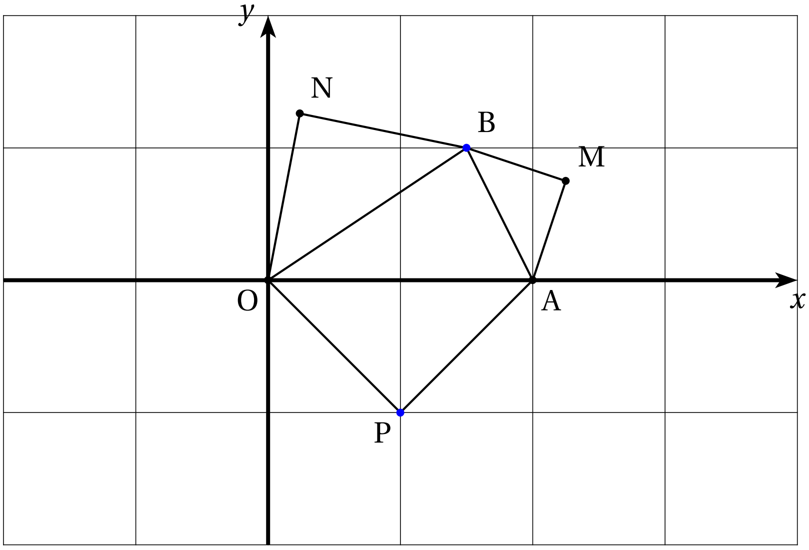
4. Quels sont les points de la suite (A_n) appartenant à la droite (ΩB) ?

37 Nouvelle-Calédonie décembre 2008

Retour au tableau

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{\text{OI}}~;~\overrightarrow{\text{OJ}}\right)$. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_{\text{A}} = 2$ et $z_{\text{B}} = \dfrac{3}{2} + \text{i}$.

On considère les points M, N et P tels que les triangles AMB, BNO et OPA soient des triangles rectangles isocèles de sens direct comme le montre la figure ci-dessous.



On note s_1 la similitude directe de centre A qui transforme M en B.

On note s_2 la similitude directe de centre O qui transforme B en N. On considère la transformation $r = s_2 \circ s_1$.

Le but de l'exercice est de démontrer de deux façons différentes que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

1. À l'aide des transformations

1. Donner l'angle et le rapport de s_1 et de s_2.
2. Déterminer l'image du point M puis celle du point I par la transformation r.
3. Justifier que r est une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ dont on précisera le centre.
4. Quelle est l'image du point O par r ?
5. En déduire que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

2. En utilisant les nombres complexes

1. Donner les écritures complexes de s_1 et s_2. On utilisera les résultats de la question 1. a.
2. En déduire les affixes z_{M} et z_{N} des points M et N.
3. Donner, sans justification, l'affixe z_{P} du point P puis démontrer que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

38 Amérique du Sud novembre 2008

Retour au tableau

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

Soit D la droite passant par le point A de coordonnées $(0\,;0\,;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées $(1\,;1\,;0)$ et soit D' la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t' \\ y & = & -t' \\ z & = & -2 \end{array}\right. \quad (t' \in \mathbb{R})$$

Le but de l'exercice est d'étudier l'ensemble S des points de l'espace équidistants de D et de D'.

1. Une équation de S

1. Montrer que D et D' sont orthogonales et non coplanaires.
2. Donner une représentation paramétrique de la droite D.
   Soit M un point de l'espace de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ et H le projeté orthogonal de M sur D.
   Montrer que $\overrightarrow{MH}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{-x+y}{2}\,;\,\dfrac{x-y}{2}\,;\,2-z\right)$.
   En déduire MH^2 en fonction de $x,\ y$ et z.
   Soit K le projeté orthogonal de M sur D'. Un calcul analogue au précédent permet d'établir que : $MK^2 = \dfrac{(x+y)^2}{2} + (2+z)^2$, relation que l'on ne demande pas de vérifier.
3. Montrer qu'un point M de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ appartient à S si et seulement si $z = -\dfrac{1}{4}xy$.

2. Étude de la surface S d'équation $z = -\dfrac{1}{4}xy$

1. On coupe S par le plan $(x\text{O}y)$. Déterminer la section obtenue.
2. On coupe S par un plan P parallèle au plan $(x\text{O}y)$.
   Quelle est la nature de la section obtenue ?
3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse sera prise en considération dans l'évaluation.*
   On coupe S par le plan d'équation $x + y = 0$. Quelle est la nature de la section obtenue ?

39 Métropole La Réunion septembre 2008

Retour au tableau

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
On réalisera une figure en prenant 4 cm comme unité graphique sur chaque axe.
On considère le point A d'affixe $z_{\text{A}} = 1$.

Partie A

k est un réel strictement positif ; f est la similitude directe de centre O de rapport k et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

On note $\text{A}_0 = \text{A}$ et pour tout entier naturel n, $A_{n+1} = f\left(A_n\right)$.

1. **1.** Étant donné un point M d'affixe z, déterminer en fonction de z l'affixe z' du point M' image de M par f.

2. Construire les points A_0, A_1, A_2 et A_3 dans le cas particulier où k est égal à $\dfrac{1}{2}$.

2. **1.** Démontrer par récurrence que pour tout entier n, l'affixe z_n du point A_n est égale à $k^n \text{e}^{\frac{\text{i}n\pi}{3}}$.

2. En déduire les valeurs de n pour lesquelles le point A_n appartient à la demi droite $\left[\text{O} ; \overrightarrow{u}\right)$ et, dans ce cas, déterminer en fonction de k et de n l'abscisse de A_n.

Partie B

Dans cette partie toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Désormais, k désigne un entier naturel non nul.

1. Donner la décomposition en facteurs premiers de 2008.

2. Déterminer, en expliquant la méthode choisie, la plus petite valeur de l'entier naturel k pour laquelle k^6 est un multiple de 2008.

3. Pour quelles valeurs des entiers n et k le point A_n appartient-il à la demi droite $\left[\text{O} ; \overrightarrow{u}\right)$ avec pour abscisse un nombre entier multiple de 2008 ?

40 Antilles-Guyane septembre 2008

Retour au tableau

PARTIE A :

On considère le système de congruences :

$$(S)\left\{\begin{array}{lcll} n & \equiv & 2 & \text{(modulo 3)}\\ n & \equiv & 1 & \text{(modulo 5)}\end{array}\right., \text{où } n \text{ désigne un entier relatif.}$$

1. Montrer que 11 est solution de (S).

2. Montrer que si n est solution de (S) alors $n - 11$ est divisible par 3.

3. Montrer que les solutions de (S) sont tous les entiers de la forme $11 + 15k$, où k désigne un entier relatif.

PARTIE B :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

On considère l'application f du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point d'affixe z' et g celle qui à tout point M d'affixe z associe le point d'affixe z'' définies par :

$$z' = \frac{1 + \text{i}\sqrt{3}}{2}z \quad \text{et} \quad z'' = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{5}}z.$$

1. Préciser la nature et les éléments caractéristiques des applications f et g.

2. On considère les points A_0 et B_0 d'affixes respectives $a_0 = 2\text{e}^{-2\text{i}\frac{\pi}{3}}$ et $b_0 = 4\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{5}}$. Soient (A_n) et (B_n) les suites de points définies par les relations de récurrences :

$$A_{n+1} = f\left(A_n\right) \quad \text{et} \quad B_{n+1} = g\left(B_n\right).$$

On note a_n et b_n les affixes respectives de A_n et B_n.

  1. Quelle est la nature de chacun des triangles $\text{O}A_nA_{n+1}$?

  2. En déduire la nature du polygone $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$.

3. **1.** Montrer que les points B_n sont situés sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

  2. Indiquer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{O}B_n},\ \overrightarrow{\text{O}B_{n+2}}\right)$.

  3. En déduire la nature du polygone $B_0B_2B_4B_6B_8$.

4. **1.** Exprimer a_n et b_n en fonction de n.

  2. Montrer que les entiers n pour lesquels les points A_n et B_n sont simultanément sur l'axe des réels sont les solutions du système (S) de la PARTIE A.

41 Polynésie juin 2008

Retour au tableau

Pour chacune des propositions suivantes indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. **Proposition 1** : « Pour tout entier naturel n non nul, n et $2n+1$ sont premiers entre eux. »
2. Soit x un entier relatif.
   Proposition 2 : « $x^2+x+3=0$ (modulo 5) si et seulement si $x \equiv 1$ (modulo 5). »
3. Soit N un entier naturel dont l'écriture en base 10 est $\overline{aba7}$.
   Proposition 3 : « Si N est divisible par 7 alors $a+b$ est divisible par 7. »
4. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
   Proposition 4 : « La similitude directe de rapport 2, d'angle $\dfrac{\pi}{6}$ et de centre le point d'affixe $1-\text{i}$ a pour écriture complexe $z' = \left(\sqrt{3}+\text{i}\right)z+\sqrt{3}-\text{i}\sqrt{3}$. »
5. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
   On considère un point A. On désigne par a son affixe. On note s la réflexion d'axe $\left(\text{O}\,;\,\vec{u}\right)$ et s_A la symétrie centrale de centre A.
   Proposition 5 : « L'ensemble des nombres complexes a tels que $s \circ s_{\text{A}} = s_{\text{A}} \circ s$ est l'ensemble des nombres réels. »

42 La Réunion juin 2008

Retour au tableau

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Soient A, B et C les points d'affixes respectives

$$z_{\text{A}} = 2+\text{i}, \quad z_{\text{B}} = 5+2\text{i} \quad \text{et} \quad z_{\text{C}} = \text{i}.$$

s_1 désigne la symétrie d'axe (AB).

1. Démontrer que s_1 transforme tout point M d'affixe z en un point M' d'affixe z' telle que

$$z' = \left(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\text{i}\right)\overline{z}+\left(-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\text{i}\right)$$

2. En déduire l'affixe de C$'$, symétrique de C par rapport à (AB).
3. Démontrer que l'ensemble des points M tels que z' est imaginaire pur est la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $4x+3y=1$.
4. Vérifier que le point C$'$ appartient à $(\mathcal{D})$.

2.
1. Démontrer que les droites $(\mathcal{D})$ et (AB) sont sécantes en un point Ω dont on précisera l'affixe ω.
2. On désigne par s_2 la symétrie d'axe $(\mathcal{D})$ et par f la transformation définie par $f = s_2 \circ s_1$. Justifier que f est une similitude directe et préciser son rapport.
3. Déterminer les images des points C et Ω par la transformation f.
4. Justifier que f est une rotation dont on donnera le centre.

3. *Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.*

1. Déterminer les couples d'entiers relatifs $(x\,;\, y)$ solutions de l'équation : $4x+3y=1$.
2. Déterminer les points de $(\mathcal{D})$ à coordonnées entières dont la distance au point O est inférieure à 9.

43 Métropole juin 2008

Retour au tableau

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Soient A et B les points d'affixes respectives $z_{\text{A}} = 1 - \text{i}$ et $z_{\text{B}} = 7 + \frac{7}{2}\text{i}$.

1. On considère la droite (d) d'équation $4x + 3y = 1$.

Démontrer que l'ensemble des points de (d) dont les coordonnées sont entières est l'ensemble des points $M_k(3k+1, -4k-1)$ lorsque k décrit l'ensemble des entiers relatifs.

2. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe de centre A qui transforme B en $M_{-1}(-2\,;\,3)$.

3. Soit s la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe

$$z' = \frac{2}{3}\text{i}z + \frac{1}{3} - \frac{5}{3}\text{i}.$$

Déterminer l'image de A par s, puis donner la nature et les éléments caractéristiques de s.

4. On note B_1 l'image de B par s et pour tout entier naturel n non nul, B_{n+1} l'image de B_n par s.

1. Déterminer la longueur AB_{n+1} en fonction de AB_n.
2. À partir de quel entier n le point B_n, appartient t-il au disque de centre A et de rayon 10^{-2} ?
3. Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels A, B_1 et B_n sont alignés.

44 Centres étrangers juin 2008

Retour au tableau

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ l'unité graphique est 2 cm.
On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives :

$$a = 2,\ \ b = 2 + 3\text{i},\ \ c = 3i,\ \ d = -\frac{5}{2} + 3\text{i}\ \text{ et }\ e = -\frac{5}{2}.$$

1. Placer ces cinq points sur un graphique qui sera complété au fil de l'exercice.

2. On admet que deux rectangles sont semblables si et seulement si le rapport de la longueur sur la largeur est le même pour les deux rectangles.
Démontrer que OABC et ABDE sont deux rectangles et qu'ils sont semblables.

3. **Étude d'une similitude directe transformant OABC en ABDE**

 1. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe s qui transforme O en A et A en B.

 2. Démontrer que la similitude s transforme OABC en ABDE.

 3. Quel est l'angle de la similitude s ?

 4. Soit Ω le centre de cette similitude. En utilisant la composée $s \circ s$, démontrer que le point Ω appartient aux droites (OB) et (AD). En déduire la position du point Ω.

4. **Étude d'une similitude indirecte transformant OABC en BAED**

 1. Montrer que l'écriture complexe de la similitude indirecte s' qui transforme O en B et qui laisse A invariant est :

$$z' = -\frac{3}{2}\text{i}\overline{z} + 2 + 3\text{i}$$

 où $\overline{z}$ désigne le conjugué du nombre complexe z.

 2. Montrer que s' transforme OABC en BAED.

 3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
 Démontrer que s' est la composée de la réflexion d'axe (OA) suivie d'une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.

45 Asie juin 2008

Retour au tableau

Soit a et b deux entiers naturels non nuls ; on appelle « réseau » associé aux entiers a et b l'ensemble des points du plan, muni d'un repère orthonormal, dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ sont des entiers vérifiant les conditions : $0 \leqslant x \leqslant a$ et $0 \leqslant y \leqslant b$. On note $R_{a,\ b}$ ce réseau.

Le but de l'exercice est de relier certaines propriétés arithmétiques des entiers x et y à des propriétés géométriques des points correspondants du réseau.

A - Représentation graphique de quelques ensembles

Dans cette question, les réponses sont attendues sans explication, sous la forme d'un graphique qui sera dûment complété sur la feuille annexe n° 1 à rendre avec la copie.

Représenter graphiquement les points $M(x\ ;\ y)$ du réseau $R_{8,8}$ vérifiant :

1. $x \equiv 2 \pmod 3$ et $y \equiv 1 \pmod 3$, sur le graphique 1 de la feuille annexe
2. $x + y \equiv 1 \pmod 3$, sur le graphique 2 de la feuille annexe ;
3. $x \equiv y \pmod 3$, sur le graphique 3 de la feuille annexe.

B - Résolution d'une équation

On considère l'équation (E) : $7x - 4y = 1$, où les inconnues x et y sont des entiers relatifs.

1. Déterminer un couple d'entiers relatifs $\left(x_0\ ;\ y_0\right)$ solution de l'équation (E).
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).
3. Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution $(x\ ;\ y)$ pour laquelle le point $M(x\ ;\ y)$ correspondant appartient au réseau $R_{4,7}$.

C - Une propriété des points situés sur la diagonale du réseau.

Si a et b sont deux entiers naturels non nuls, on considère la diagonale $[\text{O}A]$ du réseau $R_{a,\ b}$, avec $\text{O}(0\,;0)$ et $A(a\ ;\ b)$.

1. Démontrer que les points du segment $[\text{O}A]$ sont caractérisés par les conditions :

$$0 \leqslant x \leqslant a\,;\ 0 \leqslant y \leqslant b\ ;\ ay = bx.$$

2. Démontrer que si a et b sont premiers entre eux, alors les points O et A sont les seuls points du segment $[\text{O}A]$ appartenant au réseau $R_{a,\ b}$.
3. Démontrer que si a et b ne sont pas premiers entre eux, alors le segment $[\text{O}A]$ contient au moins un autre point du réseau.

   (On pourra considérer le pgcd d des nombres a et b et poser $a = da'$ et $b = db'$.)

46 Antilles–Guyane juin 2008

Retour au tableau

Partie A

On considère l'équation (E) : $11x - 26y = 1$, où x et y désignent deux nombres entiers relatifs.

1. Vérifier que le couple $(-7\,;\,-3)$ est solution de (E).
2. Résoudre alors l'équation (E).
3. En déduire le couple d'entiers relatifs $(u\,;\,v)$ solution de (E) tel que $0 \leqslant u \leqslant 25$.

Partie B

On assimile chaque lettre de l'alphabet à un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On « code » tout nombre entier x compris entre 0 et 25 de la façon suivante :

- on calcule $11x + 8$
- on calcule le reste de la division euclidienne de $11x + 8$ par 26, que l'on appelle y.

x est alors « codé » par y.
Ainsi, par exemple, la lettre L est assimilée au nombre 11 ; $11 \times 11 + 8 = 129$ or $129 \equiv 25(0 \text{ modulo } 26)$; 25 est le reste de la division euclidienne de 129 par 26. Au nombre 25 correspond la lettre Z.
La lettre L est donc codée par la lettre Z.

1. Coder la lettreW.
2. Le but de cette question est de déterminer la fonction de décodage.
   1. Montrer que pour tous nombres entiers relatifs x et j, on a :

   $$11x \equiv j \quad (\text{modulo } 26) \text{ équivaut à } x \equiv 19j (\text{modulo } 26).$$

   2. En déduire un procédé de décodage.
   3. Décoder la lettre W.

47 Amérique du Nord mai 2008

Retour au tableau

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
On nomme (S) la surface d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

1. Montrer que la surface (S) est symétrique par rapport au plan $(x\mathrm{O}y)$.

2. On nomme A et B les points de coordonnées respectives $(3~;~1~;~-3)$ et $(-1~;~1~;~1)$.

   1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par les points A et B.

   2. Démontrer que la droite (D) est incluse dans la surface (S).

3. Determiner la nature de la section de la surface (S) par un plan parallèle au plan $(x\mathrm{O}y)$.

4.
   1. On considère la courbe (C), intersection de la surface (S) et du plan d'équation $z = 68$. Préciser les éléments caractéristiques de cette courbe.

   2. M étant un point de (C), on désigne par a son abscisse et par b son ordonnée.
   On se propose de montrer qu'il existe un seul point M de (C) tel que a et b soient des entiers naturels vérifiant $a < b$ et $\text{ppcm}(a~;~b) = 440$, c'est-à-dire tel que $(a,~b)$ soit solution du système

$$(1) : \left\{\begin{array}{l} a < b \\ a^2 + b^2 = 4\,625 \\ \text{ppcm}(a~;~b) = 440 \end{array}\right.$$

   Montrer que si $(a,~b)$ est solution de (1) alors $\text{pgcd}(a~;~b)$ est égal à 1 ou 5.
   Conclure

Dans cette question toute trace de recherche même incomplète ou d'initiative, même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

48 Liban mai 2008

Retour au tableau

Pour chacune des six propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, on considère la similitude directe f d'écriture complexe

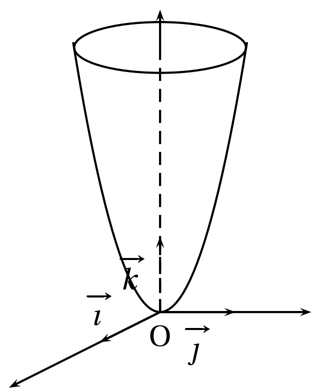
$$z \mapsto \frac{3}{2}(1-\text{i})z + 4 - 2\text{i}.$$

Proposition 1 : « $f = r \circ h$ où h est l'homothétie de rapport $3\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de centre le point Ω d'affixe $-2-2\text{i}$ et où r est la rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{4}$ ».

2. Pour tout entier naturel n non nul :
Proposition 2 : « $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 5 ».
Proposition 3 : « $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 7 ».

3. Dans le plan muni d'un repère, (D) est la droite d'équation $11x - 5y = 14$.
Proposition 4 : « les points de (D) à coordonnées entières sont les points de coordonnées $(5k + 14\ ;\ 11k + 28)$ où $k \in \mathbb{Z}$ ».

4. L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
La surface Σ ci-contre a pour équation
$z = x^2 + y^2$.



Proposition 5 : « la section de la surface Σ et du plan d'équation $x = \lambda$, où λ est un réel, est une hyperbole ».

Proposition 6 : « le plan d'équation $z = \frac{9\sqrt{2}}{2}$ partage le solide délimité par Σ et le plan d'équation $z = 9$ en deux solides de même volume ».

Rappel : Soit V le volume du solide délimité par Σ et les plans d'équations $z = a$ et $z = b$ où $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 9$.
V est donné par la formule $V = \int_a^b S(k)\, dk$ où $S(k)$ est l'aire de la section du solide par le plan d'équation $z = k$ où $k \in [a\ ;\ b]$.

49 Pondichéry avril 2008

Retour au tableau

Partie A

On suppose connu le résultat suivant :
Une application f du plan muni d'un repère orthonormal direct dans lui-même est une similitude directe si et seulement si f admet une écriture complexe de la forme $z' = az + b$, où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Démonstration de cours : on se place dans le plan complexe. Démontrer que si A, B, A' et B' sont quatre points tels que A est distinct de B et A' est distinct de B', alors il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B'.

Partie B

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonomal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives

$$z_A = -\sqrt{3} - \text{i},\ z_B = 1 - \text{i}\sqrt{3},\ z_C = \sqrt{3} + \text{i} \text{ et } z_D = -1 + \text{i}\sqrt{3}.$$

1.
1. Donner le module et un argument-de chacun des quatre nombres complexes z_A, z_B, z_C et z_D.
2. Construire à la règle et au compas les points A, B, C et D (on prendra pour unité graphique 2 cm).
3. Déterminer le milieu du segment $[AC]$, celui du segment $[BD]$. Calculer le quotient $\dfrac{z_B}{z_A}$. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

2. On considère la similitude directe g dont l'écriture complexe est $z' = \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}} z + 2$.
1. Déterminer les éléments caractéristiques de g.
2. Construire à la règle et au compas les images respectives E, F et J par g des points A, C et O.
3. Que constate-t-on concernant ces points E, F et J ? Le démontrer.

50 Nouvelle-Calédonie mars 2008

Retour au tableau

PARTIE A : Question de cours

Quelles sont les propriétés de compatibilité de la relation de congruence avec l'addition, la multiplication et les puissances ?
Démontrer la propriété de compatibilité avec la multiplication.

PARTIE B

On note 0, 1, 2, ..., 9, α, β, les chiffres de l'écriture d'un nombre en base 12. Par exemple :

$$\overline{\beta\alpha7}^{12} = \beta \times 12^2 + \alpha \times 12 + 7 = 11 \times 12^2 + 10 \times 12 + 7 = 1\,711 \text{ en base } 10$$

1.

1. Soit N_1 le nombre s'écrivant en base 12 :

$$N_1 = \overline{\beta 1 \alpha}^{12}$$

Déterminer l'écriture de N_1 en base 10.

2. Soit N_2 le nombre s'écrivant en base 10 :

$$N_2 = 1\,131 = 1 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 3 \times 10 + 1$$

Déterminer l'écriture de N_2 en base 12.

Dans toute la suite, un entier naturel N s'écrira de manière générale en base 12 :

$$N = \overline{a_n \cdots a_1 a_0}^{12}$$

2.

1. Démontrer que $N \equiv a_0 \quad (3)$. En déduire un critère de divisibilité par 3 d'un nombre écrit en base 12.
2. À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_2 est divisible par 3. Confirmer avec son écriture en base 10.

3.

1. Démontrer que $N \equiv a_n + \cdots + a_1 + a_0 \quad (11)$. En déduire un critère de divisibilité par 11 d'un nombre écrit en base 12.
2. À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_1 est divisible par 11. Confirmer avec son écriture en base 10.

4. Un nombre N s'écrit $\overline{x4y}^{12}$. Déterminer les valeurs de x et de y pour lesquelles N est divisible par 33.

51 Nouvelle-Calédonie décembre 2007

Retour au tableau

1.

1. Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11 ? Justifier.
2. Quel est le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5 ? Justifier.
3. En déduire que $6^{40} \equiv 1\,[11]$ et que $6^{40} \equiv 1\,[5]$.
4. Démontrer que $6^{40} - 1$ est divisible par 55.

2. Dans cette question x et y désignent des entiers relatifs.

1. Montrer que l'équation
$$(E) \qquad 65x - 40y = 1$$
n'a pas de solution.
2. Montrer que l'équation
$$(E') \qquad 17x - 40y = 1$$
admet au moins une solution.
3. Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E').
4. Résoudre l'équation (E').
En déduire qu'il existe un unique naturel x_0 inférieur à 40 tel que
$17x_0 \equiv 1 \quad [40]$.

3. Pour tout entier naturel a, démontrer que si $a^{17} \equiv b \quad [55]$ et si $a^{40} \equiv 1 \quad [55]$, alors
$b^{33} \equiv a \quad [55]$.

52 Amérique du Sud novembre 2007

Retour au tableau

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On fera une figure que l'on complétera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice.

1. On considère les points A d'affixe 1 et B d'affixe i. On appelle S la réflexion (symétrie axiale) d'axe (AB).
Montrer que l'image M' par S d'un point M d'affixe z a pour affixe
$z' = -\text{i}\overline{z} + 1 + \text{i}$.

2. On note H l'homothétie de centre A et de rapport -2. Donner l'écriture complexe de H.

3. On note f la composée $H \circ S$.
   1. Montrer que f est une similitude.
   2. Déterminer l'écriture complexe de f.

4. On appelle M'' l'image d'un point M par f.
   1. Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{\text{A}M''} = -2\overrightarrow{\text{A}M}$ est la droite (AB).
   2. Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{\text{A}M''} = 2\overrightarrow{\text{A}M}$ est la perpendiculaire en A à la droite (AB).

53 Métropole - Réunion septembre 2007

Retour au tableau

1. On considère l'ensemble $A_7 = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

1. Pour tout élément a de A_7 écrire dans le tableau figurant en annexe 2 l'unique élément y de A_7 tel que $ay \equiv 1 \pmod 7$.

2. Pour x entier relatif, démontrer que l'équation $3x \equiv 5 \pmod 7$ équivaut à $x \equiv 4 \pmod 7$.

3. Si a est un élément de A_7, montrer que les seuls entiers relatifs x solutions de l'équation $ax \equiv 0 \pmod 7$ sont les multiples de 7.

2. Dans toute cette question, p est un nombre premier supérieur ou égal à 3. On considère l'ensemble $A_p = \{1 ; 2 ; \ldots ; p-1\}$ des entiers naturels non nuls et strictement inférieurs à p. Soit a un élément de A_p.

1. Vérifier que a^{p-2} est une solution de l'équation $ax \equiv 1 \pmod p$.

2. On note r le reste dans la division euclidienne de a^{p-2} par p. Démontrer que r est l'unique solution x dans A_p, de l'équation $ax \equiv 1 \pmod p$.

3. Soient x et y deux entiers relatifs. Démontrer que $xy \equiv 0 \pmod p$ si et seulement si x est un multiple de p où y est un multiple de p.

4. Application : $p = 31$. Résoudre dans A_{31} les équations : $2x \equiv 1 \pmod{31}$ et $3x \equiv 1 \pmod{31}$. À l'aide des résultats précédents, résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $6x^2 - 5x + 1 \equiv 0 \pmod{31}$.

54 Antilles-Guyane septembre 2007

Retour au tableau

ABC est un triangle équilatéral tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
Soit t un nombre réel fixe et soient les points $M,\ N$ et P, deux à deux distincts, définis par

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BN} = t\overrightarrow{BC} \text{ et } \overrightarrow{CP} = t\overrightarrow{CA}.$$

Le but de l'exercice est de démontrer l'existence d'une unique similitude directe σ qui transforme les points A, B et C en respectivement $M,\ N$ et P, et d'en préciser les éléments caractéristiques.
On munit le plan dun repère orthonorinal $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ direct.
On note $a,\ b,\ c,\ m,\ n$ et p, les affixes respectives des points A, B, C, $M,\ N$ et P.

1. On rappelle que toute similitude conserve le barycentre.

1. Exprimer $m,\ n$ et p en fonction de $a,\ b,\ c$ et t.
2. En deduire que les deux triangles ABC et MNP ont même centre de gravité. Ou notera G ce centre de gravité.
3. On suppose que σ existe. Déterminer l'image de G par σ.

2. On considére la rotation r dc centre G et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

1. Vérifier que M est le barycentre du système de points $\{\text{A}(1-t)\ ;\ \text{B}(t)\}$, et en déduire que $r(M) = N$. On admet de même que $r(N) = P$ et $r(P) = M$.
2. Soit σ_1, la similitude directe de centre G de rapport $\dfrac{\text{GM}}{\text{GA}}$ et d'angle $\left(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GM}\right)$. Montrer qu'elle transforme les points A, B et C en respectivement $M,\ N$ et P.
3. Conclure sur l' existence et l'unicité de σ.

55 Polynésie juin 2007

Retour au tableau

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points A (1 ; 3 ; 2), B(4 ; 6 ; −4) et le cône (Γ) d'axe $\left(O, \vec{k}\right)$, de sommet O et contenant le point A.

Partie A

1. Montrer qu'une équation de (Γ) est $x^2 + y^2 = \dfrac{5}{2}z^2$.
2. Soit (P) le plan parallèle au plan (xOy) et contenant le point B.
   1. Déterminer une équation de (P).
   2. Préciser la nature de l'intersection (C_1) de (P) et de (Γ).
3. Soit (Q) le plan d'équation $y = 3$. On note (C_2) l'intersection de (Γ) et de (Q). Sans justification, reconnaître la nature de (C_2) parmi les propositions suivantes :
   - deux droites parallèles ;
   - deux droites sécantes ;
   - une parabole ;
   - une hyperbole ;
   - un cercle.

Partie B

Soient x, y et z trois entiers relatifs et M le point de coordonnées (x, y, z). Les ensembles (C_1) et (C_2) sont les sections définies dans la partie A.

1. On considère l'équation (E) : $x^2 + y^2 = 40$ où x et y sont des entiers relatifs.
   1. Résoudre l'équation (E).
   2. En déduire l'ensemble des points de (C_1) dont les coordonnées sont des entiers relatifs.
2.
   1. Démontrer que si le point M de coordonnées $(x ; y ; z)$ où x, y et z désignent des entiers relatifs est un point de (Γ) alors z est divisible par 2 et $x^2 + y^2$ est divisible par 10.
   2. Montrer que si M est un point de (C_2), intersection de (Γ) et de (Q), alors $x^2 \equiv 1$ modulo 10.
   3. Résoudre, dans l'ensemble des entiers relatifs, l'équation $x^2 \equiv 1$ modulo 10.
   4. Déterminer un point de (C_2), distinct de A, dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

56 La Réunion juin 2007

Retour au tableau

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

A, B, C, désignent les points d'affixes respectives $a = -2\sqrt{3}$, $b = \sqrt{3} - 3\text{i}$ et $c = 2\text{i}$.

1. **1.** Écrire b sous forme exponentielle.

2. Les points A et C sont représentés sur la figure jointe en annexe 2.
Construire à la règle et au compas le point B sur ce dessin (laisser les traces de construction apparentes).

3. Déterminer une mesure en radians de l'angle $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{\text{AB}}\right)$ et de l'angle $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{\text{AC}}\right)$.

2. Les points E et F ont pour affixes respectives $e = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}\text{i}$ et $f = -\sqrt{3} - \text{i}$.

1. Démontrer que les points A, E et C, d'une part, et les points A, F et B, d'autre part, sont alignés,

2. Démontrer que le quotient $\dfrac{e-c}{e-b}$ peut s'écrire $k\text{i}$ où k est un nombre réel à déterminer. Interpréter géométriquement ce résultat. On admet que, de façon analogue, $\dfrac{f-c}{f-b}$ peut s'écrire $k'\text{i}$ où k' est un nombre réel non nul que l'on ne demande pas de déterminer.

3. Placer les points E et F sur la figure.

3. On désigne par S la similitude indirecte dont l'écriture complexe est

$$z \longmapsto \frac{1}{2}\overline{z} - \sqrt{3}.$$

Déterminer les images par S des trois points A, B et C.

4. Soit H le point d'intersection des droites (BE) et (CF). Placer le point $S(\text{H})$ sur la figure.

57 Métropole juin 2007

Retour au tableau

La figure est proposée en annexe 1. *Elle sera complétée tout au long de l'exercice.*

Dans le plan complexe, rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A, B et C, d'affixes respectives $-5+6\text{i}$, $-7-2\text{i}$ et $3-2\text{i}$. On admet que le point F, d'affixe $-2+\text{i}$ est le centre du cercle Γ circonscrit au triangle ABC.

1. Soit H le point d'affixe -5. Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe de centre A qui transforme le point C en le point H.

2.
   1. Étant donné des nombres complexes z et z', on note M le point d'affixe z et M' le point d'affixe z'. Soient a et b des nombres complexes.
   Soit s la transformation d'écriture complexe $z' = a\overline{z} + b$ qui, au point M, associe le point M'.
   Déterminer a et b pour que les points A et C soient invariants par s. Quelle est alors la nature de s ?

   2. En déduire l'affixe du point E, symétrique du point H par rapport à la droite (AC).

   3. Vérifier que le point E est ùn point du cercle Γ.

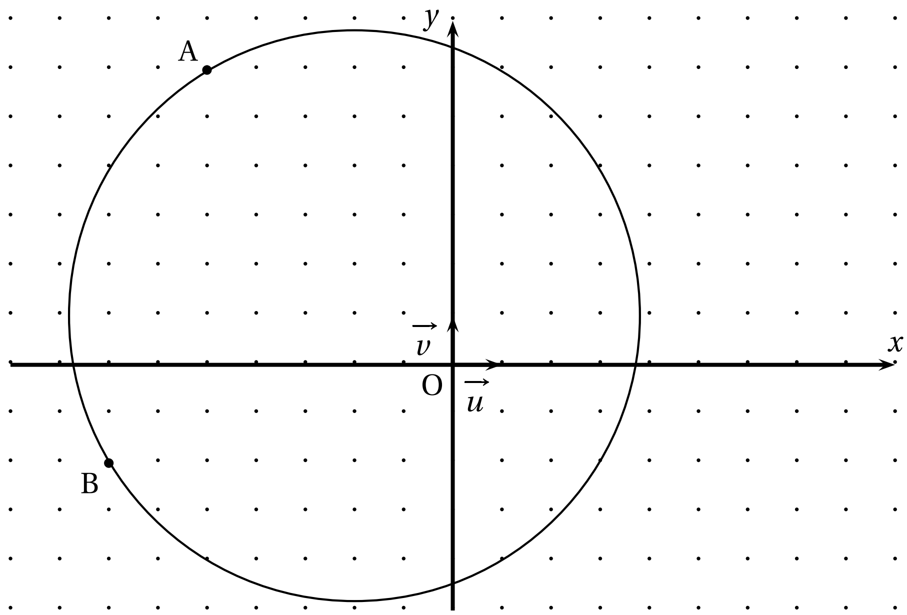
3. Soit I le milieu du segment [AC]. Déterminer l'affixe du point G, image du point I par l'homothétie de centre B et de rapport $\dfrac{2}{3}$.
Démontrer que les points H, G et F sont alignés.

ANNEXE 1

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

À compléter et à rendre avec la copie

Exercice 3



58 Centres étrangers juin 2007

Retour au tableau

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. L'unité graphique est 2 cm. Le but de cet exercice est d'étudier la similitude plane indirecte f d'écriture complexe :

$$z' = \mathrm{i}\sqrt{2}\overline{z} + 2\mathrm{i}\sqrt{2} - 2,$$

et d'en donner deux décompositions.

I. Restitution organisée de connaissances

On rappelle que l'écriture complexe d'une similitude plane directe autre qu'une translation est de la forme $z' = az + b$, où a et b sont des nombres complexes avec $a \neq 1$. Déterminer en fonction de a et de b l'affixe du centre d'une telle similitude plane directe.

II. Première décomposition de f

Soit g la similitude plane directe d'écriture complexe :

$$z' = \mathrm{i}\sqrt{2}z + 2\mathrm{i}\sqrt{2} - 2.$$

1. Préciser les éléments caractéristiques de g (centre, rapport, angle).

2. Déterminer une réflexion s telle que $f = g \circ s$.

Ill. Deuxième décomposition de f

1. Montrer que f admet un unique point invariant noté Ω. Déterminer l'affixe ω de Ω.

2. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation : $y = x + 2$. Montrer que pour tout point N appartenant à $\mathscr{D}$, le point $f(N)$ appartient aussi à $\mathscr{D}$.

3. Soit σ la réflexion d'axe $\mathscr{D}$ et k la transformation définie par : $k = f \circ \sigma$.

   1. Donner l'écriture complexe de σ. (Indication : on pourra poser $z' = a\mathrm{i} + b$ et utiliser deux points invariants par σ pour déterminer les nombres complexes a et b.)

   2. En déduire que l'écriture complexe de k est : $z' = \sqrt{2}z + 2\sqrt{2} - 2$.

   3. Donner la nature de la transformation k et préciser ses éléments caractéristiques.

4. Déduire de ce qui précède une écriture de la similitude indirecte f comme composée d'une réflexion et d'une homothétie.

59 Asie juin 2007

Retour au tableau

Le but de cet exercice est d'étudier une même configuration géométrique à l'aide de deux méthodes différentes.

I À l'aide des nombres complexes, sur un cas particulier

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. L'unité graphique est 1 cm.

1. On considère les points A et B d'affixes respectives 10 et 5i.

 1. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe s qui transforme O en A et B en O.

 2. Déterminer les éléments caractéristiques de s. On note Ω son centre.

 3. Déterminer le point $s \circ s(\text{B})$; en déduire la position du point Q par rapport aux sommets du triangle ABO.

2. On note $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x - 2y = 0$, puis A$'$ et B$'$ les points d'affixes respectives 8+4i et 2+i.

 1. Démontrer que les points A$'$ et B$'$ sont les projetés orthogonaux respectifs des points A et de B sur la droite $\mathcal{D}$.

 2. Vérifier que $s(\text{B}') = \text{A}'$.

 3. En déduire que le point Ω appartient au cercle de diamètre $\left[\text{A}'\text{B}'\right]$.

II À l'aide des propriétés géométriques des similitudes

OAB est un triangle rectangle en O tel que $\left(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OB}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

1. On note encore s est la similitude directè telle que $s(\text{O}) = \text{A}$ et $s(\text{B}) = \text{O}$. Soit Ω son centre.

 1. Justifier le fait que l'angle de s est égal à $\dfrac{\pi}{2}$.

 2. Démontrer que Ω appartient au cercle de diamètre [OA]. (On admet de même que Ω appartient aussi au cercle de diamètre [OB].)

 En déduire que Ω est le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OAB.

2. On désigne par $\mathcal{D}$ une droite passant par O, distincte des droites (OA) et (OB). On note A$'$ et B$'$ les projetés othogonaux respectifs des points A et B sur la droite $\mathcal{D}$.

 1. Déterminer les images des droites (BB$'$) et $\mathcal{D}$ par la similitude s.

 2. Déterminer le point $s(\text{B}')$.

 3. En déduire que le point Ω appartient au cercle de diamètre [A$'$B$'$]

60 Antilles-Guyane juin 2007

Retour au tableau

$\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ est un repère orthonormal direct du plan complexe (unité graphique 1 cm).

On considère le point A d'affixe $z_A = 1+\text{i}$. On note S_1 la symétrie orthogonale par rapport à l'axe $\left(\text{O} ; \vec{u}\right)$ et h l'homothétie de centre O et de rapport 3. On pose $s = h \circ S_1$.

Partie A

1. Placer le point A et compléter la figure au fur et à mesure.
2. Quelle est la nature de la transformation s ? Justifier.
3. Déterminer l'écriture complexe de la transformation s.
4.
   1. Déterminer l'affixe z_B du point B image de A par s.
   2. Montrer que $z_B = -3\text{i}z_A$. Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{O}A}, \overrightarrow{\text{O}B}\right)$.
5. Soient M le milieu de $[AB]$ et P l'image de M par s. Montrer que la droite $(\text{O}P)$ est perpendiculaire à la droite (AB).

Partie B

1. On pose $C = s(B)$. Montrer que P est le milieu de $[BC]$.
2.
   1. Déterminer l'écriture complexe de $s \circ s$ et en déduire sa nature.
   2. Montrer que l'image de la droite $(\text{O}P)$ par s est la droite (OM).
   3. Que représente le point M pour le triangle OBP ? Justifier.

61 Amérique du Nord juin 2007

Retour au tableau

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 1 cm).
On fera une figure que l'on complétera tout au long de cet exercice.
Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a = 3+5\text{i}$, $b = -4+2\text{i}$ et $c = 1+4\text{i}$.
Soit f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = (2-2\text{i})z+1$.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

2.
 1. Déterminer l'affixe du point B′ image du point B par f.
 2. Montrer que les droites (CB′) et (CA) sont orthogonales.

3. Soit M le point d'affixe $z = x+\text{i}y$, où on suppose que x et y sont des entiers relatifs. Soit M' l' image de M par f. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{\text{C}M'}$ et $\overrightarrow{\text{CA}}$ sont orthogonaux si et seulement si $x+3y = 2$.

4. On considère l'équation (E) : $x+3y = 2$, où x et y sont des entiers relatifs.
 1. Vérifier que le couple $(-4\ ;\ 2)$ est une solution de (E).
 2. Résoudre l'équation (E).
 3. En déduire l'ensemble des points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $[-5\ ;\ 5]$ et tels que les vecteurs $\overrightarrow{\text{C}M'}$ et $\overrightarrow{\text{CA}}$ soient orthogonaux.
 Placer ces points sur la figure.

62 Liban juin 2007

Retour au tableau

Pour chacune des 5 *propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.*

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On considère la transformation du plan qui à tout point d'affixe z associe le point d'affixe z' définie par : $z' = 2\text{i}z + 1$.

Proposition 1 : « Cette transformation est la similitude directe de centre A d'affixe $\dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{5}\text{i}$, d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et de rapport 2 ».

2. Dans l'espace muni du repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on note S la surface d'équation $z = x^2 + 2x + y^2 + 1$.

Proposition 2 : « La section de S avec le plan d'équation $z = 5$ est un cercle de centre A de coordonnées $(-1 ; 0 ; 5)$ et de rayon 5 ».

3. **Proposition 3 :** « $5^{750} - 1$ est un multiple de 7 ».

4. **Proposition 4 :** « Si un entier naturel n est congru à 1 modulo 7 alors le PGCD de $3n+4$ et de $4n+3$ est égal à 7 ».

5. Soient a et b deux entiers naturels.

Proposition 5 : « S'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 2$ alors le PGCD de a et b est égal à 2 ».

63 Pondichéry avril 2007

Retour au tableau

1. *Dans cette question, il est demandé au candidat d'exposer des connaissances*

On suppose connus les résultats suivants :

– La composée de deux similitudes planes est une similitude plane ;

– la transformation réciproque d'une similitude plane est une similitude plane ;

– une similitude plane qui laisse invariants trois points non alignés du plan est l'identité du plan.

Soient A, B et C trois points non alignés du plan et s et s' deux similitudes du plan telles que $s(\mathrm{A}) = s'(\mathrm{A})$, $s(\mathrm{B}) = s'(\mathrm{B})$ et $s(\mathrm{C}) = s'(\mathrm{C})$.

Montrer que $s = s'$.

2. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. La figure sera complétée au fur et à mesure. On donne les points A d'affixe 2, E d'affixe $1+\mathrm{i}$, F d'affixe $2+\mathrm{i}$ et G d'affixe $3+\mathrm{i}$.

1. Calculer les longueurs des côtés des triangles OAG et OEF. En déduire que ces triangles sont semblables.
2. Montrer que OEF est l'image de OAG par une similitude indirecte S, en déterminant l'écriture complexe de S.
3. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. On pose $\mathrm{A}' = h(\mathrm{A})$ et $\mathrm{G}' = h(\mathrm{G})$, et on appelle I le milieu de $[\mathrm{EA}']$. On note σ la symétrie orthogonale d'axe (OI). Montrer que $S = \sigma \circ h$.

64 Nouvelle-Calédonie mars 2007

Retour au tableau

Pour coder un message, on procède de la manière suivante : à chacune des 26 lettres de l'alphabet, on commence par associer un entier n de l'ensemble $\Omega = \{0 ; 1 ; 2 ; \ldots ; 24 ; 25\}$ selon le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

a et b étant deux entiers naturels donnés, on associe à tout entier n de Ω le reste de la division euclidienne de $(an + b)$ par 26 ; ce reste est alors associé à la lettre correspondante.
Exemple : pour coder la lettre P avec $a = 2$ et $b = 3$, on procède de la manière suivante : étape 1 : on lui associe l'entier $n = 15$. étape 2 : le reste de la division de $2 \times 15 + 3 = 33$ par 26 est 7. étape 3 : on associe 7 à H. Donc P est codé par la lettre H.

1. Que dire alors du codage obtenu lorsque l'on prend $a = 0$?

2. Montrer que les lettres A et C sont codées par la même lettre lorsque l'on choisit $a = 13$.

3. *Dans toute la suite de l'exercice*, on prend $a = 5$ et $b = 2$.

   1. On considère deux lettres de l'alphabet associées respectivement aux entiers n et p. Montrer, que si $5n + 2$ et $5p + 2$ ont le même reste dans la division par 26 alors $n - p$ est un multiple de 26. En déduire que $n = p$.

   2. Coder le mot AMI.

4. On se propose de décoder la lettre E.

   1. Montrer que décoder la lettre E revient à déterminer l'élément n de Ω tel que $5n - 26y = 2$, où y est un entier.

   2. On considère l'équation $5x - 26y = 2$, avec x et y entiers relatifs.

      a. Donner une solution particulière de l'équation $5x - 26y = 2$.

      b. Résoudre alors l'équation $5x - 26y = 2$.

      c. En déduire qu'il existe un unique couple $(x ; y)$ solution de l'équation précédente, avec $0 \leqslant x \leqslant 25$.

   3. Décoder alors la lettre E.

65 Nouvelle-Calédonie novembre 2006

Retour au tableau

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. (unité 1 cm). On construira une figure que l'on complétera au fur et mesure.

1. Soit A le point d'affixe 3, et r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. On note B, C, D, E et F les images respectives des points A, B, C, D et E par la rotation r. Montrer que B a pour affixe $\dfrac{3}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\text{i}$.

2. Associer à chacun des points C, D, E et F l'une des affixes de l'ensemble suivant

$$\left\{-3\ ;\ -\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\text{i}\ ;\ \frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\text{i}\ ;\ -\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\text{i}\right\}$$

3.
  1. Déterminer $r(\text{F})$.
  2. Quelle est la nature du polygone ABCDEF ?

4. Soit s la similitude directe de centre A, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. Soit s' la similitude directe de centre E transformant F en C.
  1. Déterminer l'angle et le rapport de s'. En déduire l'angle et le rapport de $s'\circ s$.
  2. Quelle est l'image du point D par $s'\circ s$?
  3. Déterminer l'écriture complexe de s'.

5. Soit A$'$ le symétrique de A par rapport à C.
  1. Sans utiliser les nombres complexes, déterminer $s(\text{A}')$ puis l'image de A$'$ par $s'\circ s$.
  2. Calculer l'affixe du point A$'$. Retrouver alors le résultat du **a.** en utilisant l'écriture complexe de $s'\circ s$.

66 Amérique du Sud novembre 2006

Retour au tableau

Rappel : Pour deux entiers relatifs a et b, on dit que a est congru à b modulo 7, et on écrit $a \equiv b \pmod 7$ lorsqu'il existe un entier relatif k tel que $a = b + 7k$.

1. *Cette question constitue une restitution organisée de connaissances*

   1. Soient $a,\ b,\ c$ et d des entiers relatifs. Démontrer que : si $a \equiv b \pmod 7$ et $c \equiv d \pmod 7$ alors $ac \equiv bd \pmod 7$.

   2. En déduire que : pour a et b entiers relatifs non nuls si $a \equiv b \pmod 7$ alors pour tout entier naturel n, $a^n \equiv b^n \pmod 7$.

2. Pour $a = 2$ puis pour $a = 3$, déterminer un entier naturel n non nul tel que $a^n \equiv 1 \pmod 7$.

3. Soit a un entier naturel non divisible par 7.

   1. Montrer que : $a^6 \equiv 1 \pmod 7$.

   2. On appelle *ordre* de $a \pmod 7$, et on désigne par k, le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1 \pmod 7$. Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifie $a^r \equiv 1 \pmod 7$. En déduire que k divise 6. Quelles sont les valeurs possibles de k ?

   3. Donner l'ordre modulo 7 de tous les entiers a compris entre 2 et 6.

4. À tout entier naturel n, on associe le nombre

$$A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n.$$

Montrer que $A_{2006} \equiv 6 \pmod 7$.

67 Métropole septembre 2006

Retour au tableau

1. On considère l'équation $(\mathscr{E})\quad:\quad 17x - 24y = 9$, où $(x,\ y)$ est un couple d'entiers relatifs.

1. Vérifier que le couple (9 ; 6) est solution de l'équation $(\mathscr{E})$.

2. Résoudre l'équation $(\mathscr{E})$.

2. Dans une fête foraine, Jean s'installe dans un un manège circulaire représenté par le schéma de l'annexe 2. Il peut s'installer sur l'un des huit points indiqués sur le cercle. Le manège comporte un jeu qui consiste à attraper un pompon qui, se déplace sur un câble formant un carré dans lequel est inscrit le cercle. Le manège tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, à vitesse constante. Il fait un tour à vitesse constante. Il fait un tour en 24 secondes. Le pompon se déplace dans le même sens à vitesse constante. Il fait un tour en 17 secondes. Pour gagner, Jean doit attraper le pompon, et il ne peut le faire qu'aux points de contact qui sont notés A, B, C et D sur le dessin. À l'instant $t = 0$, Jean part du point H en même temps que le pompon part du point A

1. On suppose qu'à un certain instant t Jean attrape le pompon en A. Jean a déjà pu passer un certain nombre de fois en A sans y trouver le pompon. À l'instant t, on note y le nombre de tours effectués depuis son premier passage en A et x le nombre de tours effectués par le pompon. Montrer que $(x,\ y)$ est solution de l'équation $(\mathscr{E})$ de la question 1.

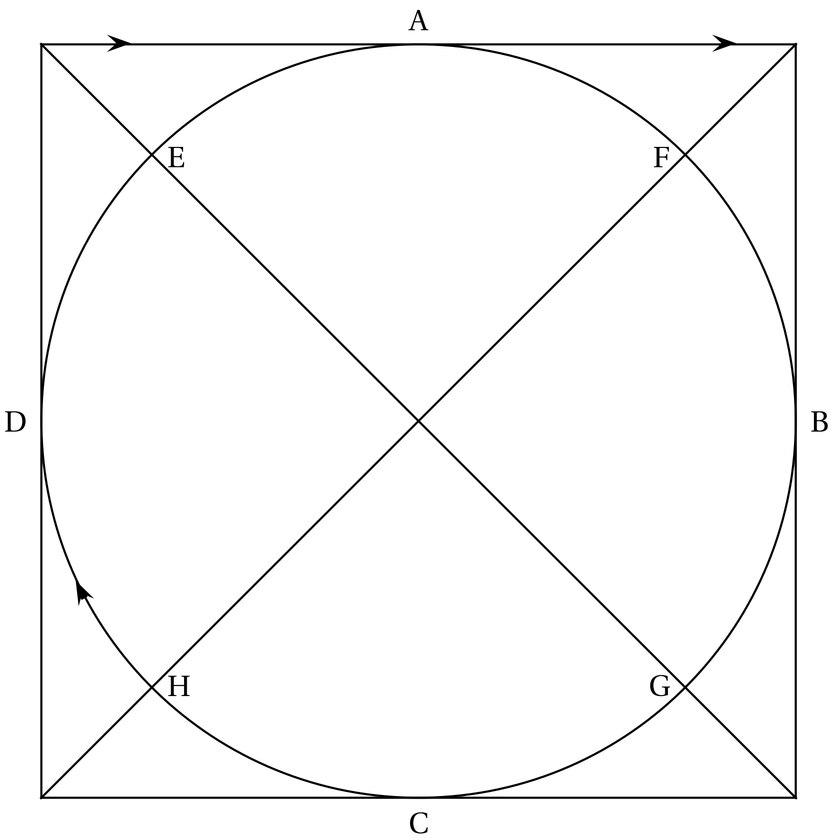
2. Jean a payé pour 2 minutes ; aura-t-il le temps d'attraper le pompon ?

3. Montrer, qu'en fait, il n'est possible d'attraper le pompon qu'au point A.

4. Jean part maintenant du point E. Aura-t-il le temps d'attraper le pompon en A avant les deux minutes ?

ANNEXE 2

Schéma de l'exercice 2



68 Polynésie juin 2006

Retour au tableau

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Proposition 1 : « pour tout entier naturel n, 3 divise le nombre $2^{2n} - 1$ ».

Proposition 2 : « Si un entier relatif x est solution de l'équation $x^2+x \equiv 0 \pmod 6$ alors $x \equiv 0 \pmod 3$ ».

Proposition 3 : « l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x ; y)$ solutions de l'équation $12x - 5y = 3$ est l'ensemble des couples $(4 + 10k ; 9 + 24k)$ où $k \in \mathbb{Z}$ ».

Proposition 4 : « il existe un seul couple $(a ; b)$ de nombres entiers naturels, tel que $a < b$ et $\text{PPCM}(a, b) - \text{PGCD}(a, b) = 1$ ». Deux entiers naturels M et N sont tels que M a pour écriture abc en base dix et N a pour écriture bca en base dix.

Proposition 5 : « Si l'entier M est divisible par 27 alors l'entier $M - N$ est aussi divisible par 27 ».

69 La Réunion juin 2006

Retour au tableau

On complètera la figure donnée en annexe 2 au fur et à mesure des questions, et on la rendra avec la copie.

ABCD est un carré tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = +\dfrac{\pi}{2}$. Soit I le centre du carré ABCD. Soit J le milieu du segment [CD]. On désigne par s la similitude directe qui transforme A en I et B en J.

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de la similitude s. Dans la partie A on utilisera des raisonnements géométriques ; dans la partie B on utilisera les nombres complexes.

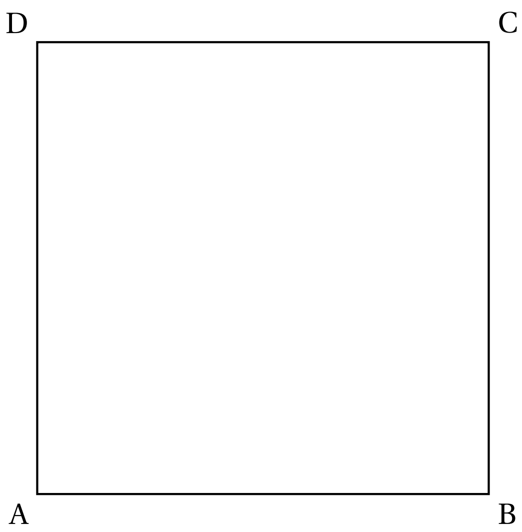
Partie A

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude s.
2. On désigne par Ω le centre de cette similitude. Γ_1 est le cercle de diamètre [AI], Γ_2 est le cercle de diamètre [BJ]. Démontrer que Ω est l'un des points d'intersection de Γ_1 et Γ_2. Placer Ω sur la figure.
3. Donner l'image par s de la droite (BC). En déduire le point image par s du point C, puis le point K image par s du point I.
4. On pose $h = s \circ s$ (composée de s avec elle même).
   1. Donner la nature de la transformation h (préciser ses éléments caractéristiques).
   2. Trouver l'image du point A par h. En déduire que les points A, Ω et K sont alignés.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère $\left(\text{A} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ orthonormal direct, choisi de manière à ce que les points A, B, C et D aient comme affixes respectives 0, 2 , 2 + 2i et 2i.

1. Démontrer que l'écriture complexe de la similitude est $z' = \dfrac{1}{2}\text{i}z + 1 + \text{i}$.
2. Calculer l'affixe du point Ω.
3. Calculer l'affixe du point E tel que $s(\text{E}) = \text{A}$. Placer le point E sur la figure.



70 Métropole juin 2006

Retour au tableau

Partie A : Question de cours

1. Énoncer le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.
2. Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

Partie B

Il s'agit de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{lll} n & \equiv & 13 \quad (19)\\ n & \equiv & 6 \quad (12)\end{array}\right.$$

1. Démontrer qu'il existe un couple $(u\,;\,v)$ d'entiers relatifs tel que : $19u + 12v = 1$. (On ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple). Vérifier que, pour un tel couple, le nombre $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$ est une solution de (S).
2. 1. Soit n_0 une solution de (S), vérifier que le système (S) équivaut à

$$\left\{\begin{array}{lll} n & \equiv & n_0 \quad (19)\\ n & \equiv & n_0 \quad (12)\end{array}\right.$$

   2. Démontrer que le système $\left\{\begin{array}{lll} n & \equiv & n_0 \quad (19)\\ n & \equiv & n_0 \quad (12)\end{array}\right.$ équivaut à $n \equiv n_0 \quad (12 \times 19)$.
3. 1. Trouver un couple $(u\,;\,v)$ solution de l'équation $19u + 12v = 1$ et calculer la valeur de N correspondante.
   2. Déterminer l'ensemble des solutions de (S) (on pourra utiliser la question 2. b.).
4. Un entier naturel n est tel que lorsqu'on le divise par 12 le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13. On divise n par $228 = 12 \times 19$. Quel est le reste r de cette division ?

71 Centres étrangers juin 2006

Retour au tableau

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de divisibilité de l'entier $4^n - 1$, lorsque n est un entier naturel. On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat : « si p est un nombre entier et a un entier naturel premier avec p, alors $a^{p-1} - 1 \equiv 0 \mod p$ ».

Partie A. Quelques exemples.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, 4^n est congru à 1 modulo 3.
2. Prouver à l'aide du petit théorème de Fermat, que $4^{28} - 1$ est divisible par 29.
3. Pour $1 \leqslant n \leqslant 4$, déterminer le reste de la division de 4^n par 17. En déduire que, pour tout entier k, le nombre $4^{4k} - 1$ est divisible par 17.
4. Pour quels entiers naturels n le nombre $4^n - 1$ est-il divisible par 5 ?
5. À l'aide des questions précédentes. déterminer quatre diviseurs premiers de $4^{28} - 1$.

Partie B. Divisibilité par un nombre premier
Soit p un nombre premier différent de 2.

1. Démontrer qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $4^n \equiv 1 \mod p$.
2. Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel tel que $4^n \equiv 1 \mod p$. On note b le plus petit entier strictement positif tel que $4^b \equiv 1 \mod p$ et r le reste de la division euclidienne de n par b.
   1. Démontrer que $4^r \equiv 1 \mod p$. En déduire que $r = 0$.
   2. Prouver L'équivalence : $4^n - 1$ est divisible par p si et seulement si n est multiple de b.
   3. En déduire que b divise $p - 1$.

72 Asie juin 2006

Retour au tableau

Étant donné un entier naturel $n \geqslant 2$, on se propose d'étudier l'existence de trois entiers naturels $x,\ y$ et z tels que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1$ modulo 2^n.

Partie A : Étude de deux cas particuliers

1. Dans cette question on suppose $n = 2$. Montrer que 1, 3 et 5 satisfont à la condition précédente.
2. Dans cette question, on suppose $n = 3$.
   1. Soit m un entier naturel. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous donnant le reste r de la division euclidienne de m par 8 et le reste R de la division euclidienne de m^2 par 8.

r	0	1	2	3	4	5	6	7
R								

   2. Peut-on trouver trois entiers naturels $x,\ y$ et z tels que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 7$ modulo 8 ?

Partie B Étude du cas général où $n \geqslant 3$
Supposons qu'il existe trois entiers naturels $x,\ y$ et z tels que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1$ modulo 2^n.

1. Justifier le fait que les trois entiers naturels $x,\ y$ et z sont tous impairs ou que deux d'entre eux sont pairs.
2. On suppose que x et y sont pairs et que z est impair. On pose alors $x = 2q, y = 2r,\ z = 2s + 1$ où $q,\ r,\ s$ sont des entiers naturels.
   1. Montrer que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 1$ modulo 4.
   2. En déduire une contradiction.
3. On suppose que $x,\ y,\ z$ sont impairs.
   1. Prouver que, pour tout entier naturel k non nul, $k^2 + k$ est divisible par 2.
   2. En déduire que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 3$ modulo 8.
   3. Conclure.

73 Antilles-Guyane juin 2006

Retour au tableau

Dans le plan orienté, on considère un carré direct ABCD de centre O. Soit P un point du segment [BC] distinct de B. On note Q l'intersection de (AP) avec (CD). La perpendiculaire δ à (AP) passant par A coupe (BC) en R et (CD) en S.

1. Faire une figure.

2. Soit r la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

   1. Précisez, en justifiant votre réponse, l'image de la droite (BC) par la rotation r.

   2. Déterminez les images de R et de P par r.

   3. Quelle est la nature de chacun des triangles ARQ et APS.

3. On note N le milieu du segment $[PS]$ et M celui du segment $[QR]$. Soit s la similitude de centre A, d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

   1. Déterminez les images respectives de R et de P par s.

   2. Quel est le lieu géométrique du point N quand P décrit le segment [BC] privé de B ?

   3. Démontrez que les points M, B, N et D sont alignés.

74 Amérique du Nord juin 2006

Retour au tableau

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ (unité graphique : 4 cm). Soit Ω le point d'affixe 2. On appelle r la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et h l'homothétie de centre Ω et de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

1. On pose $\sigma = h \circ r$.

1. Quelle est la nature de la transformation σ ? Préciser ses éléments caractéristiques.
2. Montrer que l'écriture complexe de σ est : $z \longmapsto \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}z + 1 - \mathrm{i}$.
3. Soit M un point quelconque du plan d'affixe z. On désigne par M' son image par σ et on note z' l'affixe de M'. Montrer que $z - z' = \mathrm{i}\left(2 - z'\right)$.

2.

1. **Question de cours •** *Prérequis : définitions géométriques du module d'un nombre complexe et d'un argument d'un nombre complexe non nul. Propriétés algébriques des modules et des arguments.*

   Démontrer que : si A est un point donné d'affixe a, alors l'image du point P d'affixe p par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ est le point Q d'affixe q telle que $q - a = \mathrm{i}(p - a)$.
2. Déduire des questions précédentes la nature du triangle $\Omega MM'$, pour M distinct de Q.

3. Soit A_0 le point d'affixe $2 + \mathrm{i}$. On considère la suite (A_n) de points du plan définis par :

$$\text{pour tout entier naturel} \quad n,\ A_{n+1} = \sigma\left(A_n\right).$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, l'affixe a_n de A_n est donnée par :

$$a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(n+2)\pi}{4}} + 2.$$

2. Déterminer l'affixe de A_5.

4. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que l'on ait : pour $n \geqslant n_0$, le point A_n est dans le disque de centre Ω et de rayon 0,01.

75 Pondichéry avril 2006

Retour au tableau

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. On prendra 5 cm pour unité graphique. Soit f la transformation qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{i}\right)z + 1.$$

1. Justifier que f est une similitude directe dont on précisera le centre Ω (d'affixe ω), le rapport k et l'angle θ.

2. On note A_0 le point O et, pour tout entier naturel n, on pose $A_{n+1} = f(A_n)$.

   1. Déterminer les affixes des points A_1 A_2, A_3 puis placer les points A_0, A_1, A_2 et A_3.

   2. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \Omega A_n$. Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique puis établir que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

   3. À partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre Ω et de rayon 0,1 ?

3. **1.** Quelle est la nature du triangle $\Omega A_0 A_1$? En déduire, pour tout entier naturel n, la nature du triangle $\Omega A_n A_{n+1}$.

   2. Pour tout entier naturel n, on note ℓ_n la longueur de la ligne brisée $A_0 A_1 A_2 \ldots A_{n-1} A_n$. On a ainsi : $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$. Exprimer ℓ_n en fonction de n. Quelle est la limite de la suite (ℓ_n) ?

76 Nouvelle–Calédonie novembre 2005

Retour au tableau

Le plan est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. Unité graphique : **4 cm**

Partie I

1. Placer les points I, J, H, A, B, C, D d'affixes respectives :

$$z_{\text{I}} = 1\ ,\ z_{\text{J}} = \text{i}\ ,\ z_{\text{H}} = 1 + \text{i}\ ,\ z_{\text{A}} = 2\ ,\ z_{\text{B}} = \frac{3}{2} + \text{i}\ ,\ z_{\text{C}} = 2\text{i} \text{ et } z_{\text{D}} = -1$$

2. Soit E le symétrique de B par rapport à H. La perpendiculaire à la droite (AE) passant par C et la parallèle à la droite (OC) passant par D se coupent en F.

Placer E et F et vérifier que le point F a pour affixe $z_{\text{F}} = -1 + \frac{1}{2}\text{i}$.

3. Montrer que les triangles OAB et OCF sont isométriques.

Partie II

On considère la transformation f du plan, d'écriture complexe : $z' = -\text{i}\overline{z} + 2\text{i}$.

1. Déterminer les images des points O, A, B par f.

2.
   1. Montrer que f est une similitude. Est-ce une isométrie ?
   2. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
   3. La transformation f est-elle une symétrie axiale ?

3. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{\text{IJ}}$. Donner l'écriture complexe de t et celle de sa réciproque t^{-1}.

4. On pose $s = f \circ t^{-1}$.
   1. Montrer que l'écriture complexe de s est : $z' = -\text{i}\overline{z} + 1 + \text{i}$.
   2. Montrer que I et J sont invariants par s. En déduire la nature de s.
   3. En déduire que f est la composée d'une translation et d'une symétrie axiale à préciser.

77 Amérique du Sud novembre 2005

Retour au tableau

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 4 cm. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a,\ b,\ c$ et d telles que :

$$a = \text{i}, \qquad b = 1 + 2\text{i}, \qquad c = \sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}, \quad \text{et} \quad d = 3 + 2\text{i}.$$

On considère la similitude directe s qui transforme A en B et C en D. Soit M un point d'affixe z et M', d'affixe z', son image par s.

1. Exprimer z' en fonction de z. Déterminer les éléments caractéristiques de s.
Soit (U_n) la suite numérique définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcll} U_0 & = & 0 & \\ U_{n+1} & = & 2U_n + 1 & \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{array}\right.$$

2. Montrer que, pour tout entier naturel $n,\ U_{n+1}$ et U_n sont premiers entre eux.

3. Interpréter géométriquement, en utilisant la similitude s, les termes de la suite (U_n).

4. Montrer que pour tout entier naturel $n, U_n = 2^n - 1$.

5. Montrer que, pour tous entiers naturels n et p non nuls tels que $n \geqslant p$,

$$U_n = U_p\left(U_{n-p} + 1\right) + U_{n-p}.$$

La notation pgcd$(a\ ;\ b)$ est utilisée, dans la suite, pour désigner le plus grand diviseur commun à deux entiers naturels a et b. Montrer pour $n \geqslant p$ l'égalité

$$\text{pgcd}\left(U_n\,, U_p\right) = \text{pgcd}\left(U_p,\ U_{n-p}\right).$$

6. Soit n et p deux entiers naturels non nuls, montrer que :

$$\text{pgcd}\left(U_n,\ U_p\right) = U_{\text{pgcd}(n\ ;\ p)}.$$

Déterminer le nombre : pgcd$(U_{2005},\ U_{15})$.

78 Métropole septembre 2005

Retour au tableau

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Chaque réponse exacte rapporte 1 *point. Chaque réponse fausse enlève* 0,5 *point. Une absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro. Aucune justification n'est demandée.*

1. On considère dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation : $x^2 - x + 4 \equiv 0 \quad (\text{modulo } 6)$.

A : toutes les solutions sont des entiers pairs.

B : il n'y a aucune solution.

C : les solutions vérifient $x \equiv 2 \quad (\text{modulo } 6)$.

D : les solutions vérifient $x \equiv 2 \quad (\text{modulo } 6)$ ou $x \equiv 5 \quad (\text{modulo } 6)$.

2. On se propose de résoudre l'équation (E) : $24x + 34y = 2$, où x et y sont des entiers relatifs.

A : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x\,;y) = (34k - 7\,;\,5 - 24k),\ k \in \mathbb{Z}$.

B : L'équation (E) n'a aucune solution.

C : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x\,;\,y) = (17k - 7\,;\,5 - 12k),\ k \in \mathbb{Z}$.

D : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x\,;\,y) = (-7k\,;\,5k),\ k \in \mathbb{Z}$.

3. On considère les deux nombres $n = 1\,789$ et $p = 1\,789^{2\,005}$. On a alors :

A : $n \equiv 4 \quad (\text{modulo } 17)$ et $p \equiv 0 \quad (\text{modulo } 17)$.

B : p est un nombre premier.

C : $p \equiv 4 \quad (\text{modulo } 17)$.

D : $p \equiv 1 \quad (\text{modulo } 17)$.

4. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, les points A et B d'affixes respectives a et b. Le triangle MAB est rectangle isocèle direct d'hypoténuse [AB] si et seulement si le point M d'affixe z est tel que :

A : $z = \dfrac{b - \text{i}a}{1 - \text{i}}$.

B : $z - a = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}(b - a)$.

C : $a - z = \text{i}(b - z)$.

D : $b - z = \dfrac{\pi}{2}(a - z)$.

5. On considère dans le plan orienté deux points distincts A et B ; on note I le milieu du segment [AB]. Soit f la similitude directe de centre A, de rapport 2 et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$; soit g la similitude directe de centre A, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$; soit h la symétrie centrale de centre 1.

A : $h \circ g \circ f$ transforme A en B et c'est une rotation.

B : $h \circ g \circ f$ est la réflexion ayant pour axe la médiatrice du segment [AB].

C : $h \circ g \circ f$ n'est pas une similitude.

D : $h \circ g \circ f$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}$.

79 Amérique du Nord juin 2005

Retour au tableau

La figure jointe en annexe sera complétée au cours de l'exercice et remise avec la copie. On y laissera apparents les traits de construction.

Dans le plan orienté, on donne le triangle ABC tel que AB = 2, AC= $1+\sqrt{5}$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

1.
   1. *Démonstration de cours* : démontrer qu'il existe une seule similitude directe S transformant B en A et A en C.
   2. Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de S.

2. On appelle Ω le centre de S. Montrer que Ω appartient au cercle de diamètre [AB] et à la droite (BC). Construire le point Ω.

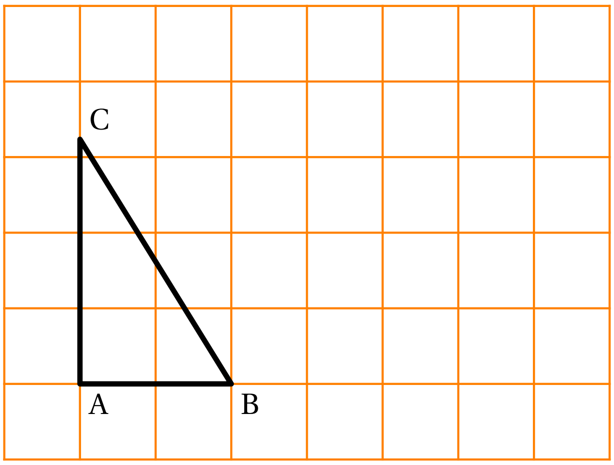
3. On note D l'image du point C par la similitude S.

   1. Démontrer l'alignement des points A, Ω et D ainsi que le parallélisme des droites (CD) et (AB). Construire le point D.
   2. Montrer que CD = $3+\sqrt{5}$.

4. Soit E le projeté orthogonal du point B sur la droite (CD).

   1. Expliquer la construction de l'image F du point E par S et placer F sur la figure.
   2. Quelle est la nature du quadrilatère BFDE ?

Annexe : exercice de spécialité



80 Antilles–Guyane juin 2005

Retour au tableau

1.

1. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n le reste dans la division euclidienne par 9 de 7^n.
2. Démontrer alors que $(2\,005)^{2\,005} \equiv 7\ (9)$.

2.

1. Démontrer que pour tout entier naturel non nul

$$n\ :\ (10)^n \equiv 1\ (9).$$

2. On désigne par N un entier naturel écrit en base dix, on appelle S la somme de ses chiffres. Démontrer la relation suivante : $N \equiv S\ (9)$.
3. En déduire que N est divisible par 9 si et seulement si S est divisible par 9.

3. On suppose que $A = (2\,005)^{2\,005}$; on désigne par :

– B la somme des chiffres de A ;
– C la somme des chiffres de B ;
– D la somme des chiffres de C.

1. Démontrer la relation suivante : $A \equiv D\ (9)$.
2. Sachant que $2\,005 < 10\,000$, démontrer que A s'écrit en numération décimale avec au plus 8 020 chiffres. En déduire que $B \leqslant 72\,180$.
3. Démontrer que $C \leqslant 45$.
4. En étudiant la liste des entiers inférieurs à 45, déterminer un majorant de D plus petit que 15.
5. Démontrer que $D = 7$.

81 Asie juin 2005

Retour au tableau

Le but de cet exercice est d'étudier les similitudes directes qui transforment l'ensemble S_1 des sommets d'un carré $\mathscr{C}_1$ donné en l'ensemble S_2 des sommets d'un carré $\mathscr{C}_2$ donné.
Le plan complexe est rapporte à un repère orthonormal direct $\mathscr{R} = \left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, unité graphique 2 cm.
On considère les points A, B, C, D, E, F, G, H d'affixes respectives

$$-\frac{\text{i}}{2},\ 1-\frac{\text{i}}{2},\ 1+\frac{\text{i}}{2},\ \frac{\text{i}}{2},\ 1-\text{i},\ 3-\text{i},\ 3+\text{i},\ 1+\text{i}.$$

$\mathscr{C}_1$ est le carré de sommets A, B, C, D et de centre O_1, $\mathscr{C}_2$ est le carré de sommet E, F G, H de centre O_2. S_1 est donc l'ensemble {A, B, C, D} et S_2 l'ensemble {E, F, G, H}.

1. Placer tous les points dans le repère $\mathscr{R}$, construire les carrés $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

2. Soit h l'homothétie de centre Ω d'affixe -1 et de rapport 2. Donner l'écriture complexe de h et prouver que h transforme S_1 en S_2.

3. Soit s une similitude directe qui transforme S_1 en S_2 et soit g la transformation $g = h^{-1} \circ s$.

1. Quel est le rapport de la similitude s ?
2. Prouver que g est une isométrie qui laisse S_1 globalement invariant.
3. Démontrer que $g(\text{O}_1) = \text{O}_1$.
4. En déduire que g est l'une des transformations suivantes : l'identité, la rotation r_1 de centre O_1 et d'angle $\frac{\pi}{2}$, la rotation r_2 de centre O_1 et d'angle π, la rotation r_3 de centre O_1 et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
5. En déduire les quatre similitudes directes qui transforment S_1 en S_2.

4. Étude des centres de ces similitudes.

1. Déterminer les écritures complexes de $h \circ r_1$, $h \circ r_2$, $h \circ r_3$.
2. En déduire les centres Ω_1, Ω_2, Ω_3 de ces similitudes et les placer sur le dessin.

82 Centres étrangers juin 2005

Retour au tableau

Partie A

Soit N un entier naturel, impair non premier.
On suppose que $N = a^2 - b^2$ où a et b sont deux entiers naturels.

1. Montrer que a et b n'ont pas la même parité.
2. Montrer que N peut s'écrire comme produit de deux entiers naturels p et q.
3. Quelle est la parité de p et de q ?

Partie B

On admet que 250 507 n'est pas premier.
On se propose de chercher des couples d'entiers naturels $(a\ ;\ b)$ vérifiant la relation

$$(\text{E}) : \quad a^2 - 250\,507 = b^2.$$

1. Soit X un entier naturel.
   1. Donner dans un tableau, les restes possibles de X modulo 9 ; puis ceux de X^2 modulo 9.
   2. Sachant que $a^2 - 250\,507 = b^2$, déterminer les restes possibles modulo 9 de $a^2 - 250\,507$; en déduire les restes possibles module 9 de a^2.
   3. Montrer que les restes possibles modulo 9 de a sont 1 et 8.
2. Justifier que si le couple $(a\ ;\ b)$ vérifie la relation (E), alors $a \geqslant 501$. Montrer qu'il n'existe pas de solution du type $(501\ ;\ b)$.
3. On suppose que le couple $(a\ ;\ b)$ vérifie la relation (E).
   1. Démontrer que a est congru à 503 ou à 505 modulo 9.
   2. Déterminer le plus petit entier naturel k tel que le couple $(505 + 9k\ ;\ b)$ soit solution de (E), puis donner le couple solution correspondant.

Partie C

1. Déduire des parties précédentes une écriture de 250 507 en un produit deux facteurs.
2. Les deux facteurs sont-ils premiers entre eux ?
3. Cette écriture est-elle unique ?

83 Métropole juin 2005

Retour au tableau

Le but de l'exercice est d'étudier quelques propriétés de la figure donnée en annexe. Cette annexe sera à rendre avec la copie.

On munit le plan d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. Le quadrilatère MNPQ est un quadrilatère non croisé et de sens direct. Les triangles MRN, NSP, PTQ et QUM sont des triangles rectangles isocèles, extérieurs au quadrilatère MNPQ et de sens direct (les sommets des angles droits étant respectivement les points R, S, T et U).

Partie A

On désigne par m, n, p et q, les affixes respectives des points M, N, P et Q.

1. Soit f la similitude directe de centre M qui transforme N en R.

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude f.
2. On désigne par r l'affixe du point R. Démontrer que $r = \dfrac{1+\text{i}}{2}m + \dfrac{1-\text{i}}{2}n$, où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$ (on pourra éventuellement utiliser l'écriture complexe de la similitude f).

   On admettra que l'on a également les résultats $s = \dfrac{1+\text{i}}{2}n + \dfrac{1-\text{i}}{2}p$, $t = \dfrac{1+\text{i}}{2}p + \dfrac{1-\text{i}}{2}q$ et $u = \dfrac{1+\text{i}}{2}q + \dfrac{1-\text{i}}{2}m$, où s, t et u désignent les affixes respectives des points S, T et U.

2. Démontrer que les quadruplets (M, N, P, Q) et (R, S, T, U) ont le même isobarycentre.

3.
1. Démontrer l'égalité $u - s = \text{i}(t - r)$.
2. Que peut-on en déduire pour les longueurs des segments [RT] et [SU], d'une part, et pour les droites (RT) et (SU), d'autre part ?

Partie B

Cette partie sera traitée sans utilisation des nombres complexes.

1. Démontrer, en utilisant les résultats établis dans la **partie A**, qu'il existe une unique rotation g qui transforme R en S et T en U.

2. Décrire comment construire géométriquement le point Ω, centre de la rotation g. Réaliser cette construction sur la figure de l'annexe.

84 La Réunion juin 2005

Retour au tableau

Dans cet exercice, on pourra utiliser le résultat suivant :
« Étant donnés deux entiers naturels a et b non nuls, si PGCD$(a\ ;\ b) = 1$ alors PGCD$(a^2\ ;\ b^2) = 1$ ».
Une suite (S_n) est définie pour $n > 0$ par $\mathrm{S}_n = \sum_{p=1}^{n} p^3$. On se propose de calculer, pour tout entier naturel non nul n, le plus grand commun diviseur de S_n et S_{n+1}.

1. Démontrer que, pour tout $n > 0$, on a : $\mathrm{S}_n = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

2. Étude du cas où n est pair. Soit k l'entier naturel non nul tel que $n = 2k$.

 1. Démontrer que PGCD$(\mathrm{S}_{2k}\ ;\ \mathrm{S}_{2k+1}) = (2k+1)^2$PGCD$\left(k^2\ ;\ (k+1)^2\right)$.

 2. Calculer PGCD $(k\ ;\ k+1)$.

 3. Calculer PGCD$(\mathrm{S}_{2k}\ ;\ \mathrm{S}_{2k+1})$.

3. Étude du cas où n est impair. Soit k l'entier naturel non nul tel que $n = 2k+1$.

 1. Démontrer que les entiers $2k+1$ et $2k+3$ sont premiers entre eux.

 2. Calculer PGCD$(\mathrm{S}_{2k+1}\ ;\ \mathrm{S}_{2k+2})$.

4. Déduire des questions précédentes qu'il existe une unique valeur de n, que l'on déterminera, pour laquelle S_n et S_{n+1} sont premiers entre eux.

85 Liban juin 2005

Retour au tableau

1. On considère l'équation (E) :

$$109x - 226y = 1$$

où x et y sont des entiers relatifs.

1. Déterminer le pgcd de 109 et 226. Que peut-on en conclure pour l'équation (E) ?
2. Montrer que l'ensemble de solutions de (E) est l'ensemble des couples de la forme $(141 + 226k,\ 68 + 109k)$, où k appartient à $\mathbb{Z}$.
   En déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul d inférieur ou égal à 226 et un unique entier naturel non nul e tels que $109d = 1 + 226e$. (On précisera les valeurs des entiers d et e.)

2. Démontrer que 227 est un nombre premier.

3. On note A l'ensemble des 227 entiers naturels a tels que $a \leqslant 226$.
On considère les deux fonctions f et g de A dans A définies de la manière suivante :
à tout entier de A, f associe le reste de la division euclidienne de a^{109} par 227.
à tout entier de A, g associe le reste de la division euclidienne de a^{141} par 227.

1. Vérifier que $g[f(0)] = 0$.
   On rappelle le résultat suivant appelé petit théorème de Fermat :
   Si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p alors $a^{p-1} \equiv 1$ modulo p.
2. Montrer que, quel que soit l'entier non nul a de A, $a^{226} \equiv 1 \quad [\text{modulo } 227]$.
3. En utilisant **1 b**, en déduire que, quel que soit l'entier non nul a de A. $g[f(a)] = a$.
   Que peut-on dire de $f[(g(a)] = a$?

86 Polynésie juin 2005

Retour au tableau

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 14 \\ u_{n+1} & = & 5u_n - 6 \text{ pour tout entier naturel } n \end{array}\right.$$

1. Calculer $u_1,\ u_2,\ u_3$ et u_4.
Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n ?

2. Montrer que, pour tout entier naturel $n,\ u_{n+2} \equiv u_n \quad (\text{modulo } 4)$.
En déduire que pour tout entier naturel $k,\ u_{2k} \equiv 2 \quad (\text{modulo } 4)$ et$u_{2k+1} \equiv 0 \quad (\text{modulo } 4)$.

   1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n, 2u_n = 5^{n+2} + 3$.

   2. En déduire que, pour tout entier naturel $n,\ 2u_n \equiv 28 \quad (\text{modulo } 100)$.

3. Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n.

4. Montrer que le PGCD de deux termes consécutifs de la suite (u_n) est constant. Préciser sa valeur.

87 Pondichéry juin 2005

Retour au tableau

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On considère l'application f qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{3+4i}{5}\overline{z} + \frac{1-2i}{5}.$$

1. On note x et x', y et y' les parties réelles et les parties imaginaires de z et z'.

Démontrer que : $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & \dfrac{3x+4y+1}{5} \\ y' & = & \dfrac{4x-3y-2}{5} \end{array}\right.$

2.
1. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
2. Quelle est la nature de l'application f ?

3. Déterminer l'ensemble D des points M d'affixe z tels que z' soit réel.

4. On cherche à déterminer les points de D dont les coordonnées sont entières.

1. Donner une solution particulière $(x_0,\ y_0)$ appartenant a $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x-3y=2$.
2. Determiner l'ensemble des solutions appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x-3y=2$.

5. On considère les points M d'affixe $z = x+iy$ tels que $x = 1$ et $y \in \mathbb{Z}$. Le point $M' = f(M)$ a pour affixe z'.

Déterminer les entiers y tels que $\text{Re}(z')$ et $\text{Im}(z')$ soient entiers (on pourra utiliser les congruences modulo 5).

88 Nouvelle–Calédonie novembre 2004

Retour au tableau

Dans cet exercice, a et b désignent des entiers strictement positifs.

1. **1.** Démontrer que s'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$ alors les nombres a et b sont premiers entre eux.

2. En déduire que si $\left(a^2 + ab - b^2\right)^2 = 1$, alors a et b sont premiers entre eux.

2. On se propose de déterminer les couples d'entiers strictement positifs $(a\,;\,b)$ tels que $\left(a^2 + ab - b^2\right)^2 = 1$. Un tel couple sera appelé solution.

1. Déterminer a lorsque $a = b$.

2. Vérifier que $(1\,;\,1)$, $(2\,;\,3)$ et $(5\,;\,8)$ sont trois solutions particulières.

3. Montrer que si $(a\,;\,b)$ est solution et si $a < b$, alors $a^2 - b^2 < 0$.

3. **1.** Montrer que si $(x\,;\,y)$ est une solution différente de $(1\,;\,1)$ alors $(y - x\,;\,x)$ et $(y\,;\,y + x)$ sont aussi des solutions.

2. Déduire de 2. b. trois nouvelles solutions.

4. On considère la suite de nombres entiers strictement positifs $(a_n)_n$ définie par $a_0 = a_1 = 1$ et pour tout entier n, $n \geqslant 0$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, $(a_n\,;\,a_{n+1})$ est solution.

En déduire que les nombres a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.

89 Amérique du Sud novembre 2004

Retour au tableau

Soit A_0 et B_0 deux points du plan orienté tels que $A_0B_0 = 8$. On prendra le centimètre pour unité.
Soit S la similitude de centre A_0, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $\dfrac{3\pi}{4}$.
On définit une suite de points (B_n) de la façon suivante :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ B_{n+1} = \text{S}(B_n).$$

1. Construire B_1, B_2, B_3 et B_4.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, les triangles $A_0B_nB_{n+1}$ et $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ sont semblables.

3. On définit la suite (ℓ_n) par : pour tout entier naturel n, $\ell_n = B_nB_{n+1}$.

  1. Montrer que la suite (ℓ_n) est une suite géométrique et préciser sa raison.

  2. Exprimer ℓ_n en fonction de n et de ℓ_0.

  3. On pose $\Sigma_n = \ell_0 + \ell_1 + \cdots + \ell_n$.
  Déterminer la limite de Σ_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4.
  1. Résoudre l'équation $3x - 4y = 2$ où x et y sont deux entiers relatifs.

  2. Soit Δ la droite perpendiculaire en A_0 à la droite (A_0B_0).
  Pour quelles valeurs de l'entier naturel n, B_n appartient-il à Δ ?

90 Antilles–Guyane septembre 2004

Retour au tableau

Pour chacune des six affirmations, dire si elle est vraie ou si elle est fausse, en justifiant le choix effectué.

1. Le PGCD de 2 004 et 4 002 est 6.

2. Si p et q sont deux entiers naturels non nuls, $2^{pq}-1$ est divisible par 2^p-1 et par $2S^q-1$.

3. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, 2^n-1 n'est jamais divisible par 9.

4. L'ensemble des couples d'entiers solutions de l'équation :

$$24x+35y=9$$

est l'ensemble des couples :

$$(-144+70k\,;\,99-24k) \text{ où } k\in\mathbb{Z}.$$

5. Soient A et B deux points distincts du plan ; si on note f l'homothétie de centre A et de rapport 3 et g l'homothétie de centre B et de rapport $\dfrac{1}{3}$ alors $g\circ f$ est la translation de vecteur A.

6. Soit s la similitude d'écriture complexe $z'=\mathrm{i}\overline{z}+(1-\mathrm{i})$, l'ensemble des points invariants de s est une droite.

91 Métropole septembre 2004

Retour au tableau

L'exercice comporte une annexe, à rendre avec la copie.

A et C sont deux points distincts du plan ; on note Γ le cercle de diamètre [AC] et O le centre de Γ ; B est un point du cercle Γ distinct des points A et C.

Le point D est construit tel que le triangle BCD soit équilatéral direct ; on a donc $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right) = +\dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.

Le point G est le centre de gravité du triangle BCD.

Les droites (AB) et (CG) se coupent en un point M.

Partie A

1. Placer les points D, G et M sur la figure de la feuille annexe.
2. Montrer que les points O, D et G appartiennent à la médiatrice du segment [BC] et que le point G est le milieu du segment [CM].
3. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe s de centre C transformant B en M.

Partie B

Dans cette question, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ choisi de telle sorte que les points A et C aient pour affixes respectives -1 et 1.

Soit E le point construit pour que le triangle ACE soit équilatéral direct ; on a donc $\left(\overrightarrow{\text{AC}}, \overrightarrow{\text{A}E}\right) = +\dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.

1. Calculer l'affixe du point E et construire le point E sur la feuille annexe.
2. Soit σ la similitude directe d'expression complexe $z' = \dfrac{3+\text{i}\sqrt{3}}{4}z + \dfrac{1-\text{i}\sqrt{3}}{4}$.
   Déterminer les éléments caractéristiques de σ et en déduire que σ est la similitude réciproque de s.
3. Montrer que l'image E' du point E par σ a pour affixe $-\dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et montrer que le point E' appartient au cercle Γ.
4. On note $\mathscr{C}$ le lieu des points M lorsque le point B décrit le cercle Γ privé des points A et C.
   Montrer que le point E appartient à $\mathscr{C}$.
   Soit O$'$ l'image du point O par la similitude s. Démontrer que le point O$'$ est le centre de gravité du triangle ACE.
   En déduire une construction de $\mathscr{C}$.

92 Polynésie septembre 2004

Retour au tableau

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. On prendra, sur la figure 1 cm pour unité graphique.
On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $-1+\mathrm{i}$, $3+2\mathrm{i}$ et $\mathrm{i}\sqrt{2}$.

1. On considère la transformation f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point $M' = f(M)$ d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\overline{z} - 1 + \mathrm{i}\left(1+\sqrt{2}\right).$$

1. Calculer les affixes des points $\mathrm{A}' = f(\mathrm{A})$ et $\mathrm{C}' = f(\mathrm{C})$.
2. En déduire la nature de f et caractériser cette transformation.
3. Placer les points A, B et C puis construire le point $\mathrm{B}' = f(\mathrm{B})$.

2.

1. Donner l'écriture complexe de l'homothétie h de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.
2. Montrer que la composée $g = f \circ h$ a pour écriture complexe
$z'' = (1+\mathrm{i})\overline{z} - 1 + 3\mathrm{i}$.

3.

1. Soit M_0 le point d'affixe 2 - 4 i.
Determiner l'affixe du point $\mathrm{M}_0'' = g(\mathrm{M}_0)$ puis vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AM}_0''}$ sont orthogonaux.
2. On considère un point M d'affixe z. On suppose que la partie réelle x et la partie imaginaire y de z sont des entiers.
Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{A}M''}$ sont orthogonaux si, et seulement si $5x+3y=-2$.
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $5x+3y=-2$.
4. En déduire les points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $[-6\,;\,6]$ tels que $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AM}''}$ sont orthogonaux. Placer les points obtenus sur la figure.

93 Amérique du Nord mai 2004

Retour au tableau

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Soient les points A, A$'$, B et B$'$ d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = 1-2\text{i},\ z_{\text{A}'} = -2+4\text{i},\ z_{\text{B}} = 3-\text{i},\ z_{\text{B}'} = 5\text{i}.$$

1.

1. Placer les points A, A$'$, B et B$'$ dans le plan complexe. Monter que ABB$'$A$'$ est un rectangle.
2. Soit s la réflexion telle que s(A)=A$'$ et s(B)=B$'$. On note (Δ) son axe.
   Donner une équation de la droite (Δ) et la tracer dans le plan complexe.
3. On note z' l'affixe du point M' image par s du point M d'affixe z.
   Montrer que
   $$z' = \left(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\text{i}\right)\overline{z}+2\text{i}-1.$$

2. Soit g l'application du plan dans lui même qui à tout point M d'affixe z associe le point P d'affixe z' définie par :

$$z' = \left(-\frac{6}{5}-\frac{8}{5}\text{i}\right)\overline{z}+5-\text{i}.$$

1. On note C et D les images respectives de A et B par g ; déterminer les affixes de C et D et placer ces points dans le plan complexe.
2. Soit Ω le point d'affixe $1+\text{i}$ et soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport -2.
   Montrer que C et D sont les images respectives de A$'$ et B$'$ par h.
3. Soit M_1 d'affixe z_1 l'image par h de M, d'affixe z. Donner les éléments caractéristiques de h^{-1} et exprimer z en fonction de z_1.

3. On pose $f = h^{-1}\circ g$.

1. Déterminer l'expression complexe de f.
2. Reconnaître f. En déduire une construction du point P, image par g d'un point M quelconque donné du plan.

94 Antilles–Guyane juin 2004

Retour au tableau

Dans le plan orienté, on considère un carré direct ABCD de centre O. Soit P un point du segment [BC] distinct de B. On note Q l'intersection de (AP) avec (CD). La perpendiculaire δ à (AP) passant par A coupe (BC) en R et (CD) en S.

1. Faire une figure.

2. Soit r la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

   1. Précisez, en justifiant votre réponse, l'image de la droite (BC) par la rotation r.

   2. Déterminez les images de R et de P par r.

   3. Quelle est la nature de chacun des triangles ARQ et APS.

3. On note N le milieu du segment $[PS]$ et M celui du segment $[QR]$. Soit s la similitude de centre A, d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

   1. Déterminez les images respectives de R et de P par s.

   2. Quel est le lieu géométrique du point N quand P décrit le segment [BC] privé de B ?

   3. Démontrez que les points M, B, N et D sont alignés.

95 Asie juin 2004

Retour au tableau

On appelle (E) l'ensemble des entiers naturels qui peuvent s'écrire sous la forme $9+a^2$ où a est un entier naturel non nul ; par exemple $10 = 9+1^2$; $13 = 9+2^2$ etc.
On se propose dans cet exercice d'étudier l'existence d'éléments de (E) qui sont des puissances de 2, 3 ou 5.

1. Étude de l'équation d'inconnue a : $a^2+9 = 2^n$ où $a \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 4$.

1. Montrer que si a existe, a est impair.
2. En raisonnant modulo 4, montrer que l'équation proposée n'a pas de solution.

2. Étude de l'équation d'inconnue a : $a^2+9 = 3^n$ où $a \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3$.

1. Montrer que si $n \geqslant 3$, 3^n est congru à 1 ou à 3 modulo 4.
2. Montrer que si a existe, il est pair et en déduire que nécessairement n est pair.
3. On pose $n = 2p$ où p est un entier naturel, $p \geqslant 2$. Déduire d'une factorisation de $3^n - a^2$, que l'équation proposée n'a pas de solution.

3. Étude de l'équation d'inconnue a : $a^2+9 = 5^n$ où $a \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$.

1. En raisonnant modulo 3, montrer que l'équation n'a pas de solution si n est impair.
2. On pose $n = 2p$, en s'inspirant de **2 c** démontrer qu'il existe un unique entier naturel a tel que a^2+9 soit une puissance entière de 5.

96 Centres étrangers juin 2004

Retour au tableau

On se propose dans cet exercice d'étudier le problème suivant :
« *Les nombres dont l'écriture décimale n'utilise que le seul chiffre* 1 *peuvent-ils être premiers* ? »
Pour tout entier naturel $p \geqslant 2$, on pose $N_p = 1\ldots1$ où 1 apparaît p fois.
On rappelle dès lors que $N_p = 10^{p-1} + 10^{p-2} + \cdots + 10^0$.

1. Les nombres $N_2 = 11,\ N_3 = 111,\ N_4 = 1111$ sont-ils premiers ?

2. Prouver que $N_p = \dfrac{10^p - 1}{9}$. Peut-on être certain que $10^p - 1$ est divisible par 9 ?

3. On se propose de démontrer que si p n'est pas premier, alors N_p n'est pas premier.
On rappelle que pour tout nombre réel x et tout entier naturel n non nul,

$$x^n - 1 = (x-1)\left(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1\right).$$

1. On suppose que p est pair et on pose $p = 2q$, où q est un entier naturel plus grand que 1.
   Montrer que N_p est divisible par $N_2 = 11$.
2. On suppose que p est multiple de 3 et on pose $p = 3q$, où q est un entier naturel plus grand que 1.
   Montrer que N_p est divisible par $N_3 = 111$.
3. On suppose p non premier et on pose $p = kq$ où k et q sont des entiers naturels plus grands que 1.
   En déduire que N_p est divisible par N_k.

4. Énoncer une condition nécessaire pour que N_p soit premier.
Cette condition est-elle suffisante ?

97 Métropole juin 2004

Retour au tableau

1. Montrer que, pour tout entier naturel non nul k et pour tout entier naturel x :

$$(x-1)\left(1+x+x^2+\cdots+x^{k-1}\right)=x^k-1.$$

Dans toute la suite de l'exercice, on considère un nombre entier a supérieur ou égal à 2.

2.
 1. Soit n un entier naturel non nul et d un diviseur positif de n : $n=dk$.
 Montrer que a^d-1 est un diviseur de a^n-1.
 2. Déduire de la question précédente que $2^{2004}-1$ est divisible par 7, par 63 puis par 9.

3. Soient m et n deux entiers naturels non nuls et d leur pgcd.

 1. On définit m' et n' par $m=dm'$ et $n=dn'$. En appliquant le théorème de Bezout à m' et n', montrer qu'il existe des entiers relatifs u et v tels que : $mu-nv=d$.
 2. On suppose u et v strictement positifs.
 Montrer que : $(a^{m}-1)-(a^{nv}-1)\,a^d=a^d-1$.
 Montrer ensuite que a^d-1 est le pgcd de $a^{mu}-1$ et de $a^{nv}-1$.
 3. Calculer, en utilisant le résultat précédent, le pgcd de $2^{63}-1$ et de $2^{60}-1$.

98 Liban juin 2004

Retour au tableau

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra 1 cm pour unité graphique. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives

$$z_{\text{A}} = 2+\text{i}, \quad z_{\text{B}} = 1+2\text{i}, \quad z_{\text{C}} = 6+3\text{i}, \quad z_{\text{D}} = -1+6\text{i}.$$

1. Représenter les points A, B, C et D.

2. Montrer qu'il existe une similitude directe f telle que $f(\text{A}) = \text{B}$ et $f(\text{C}) = \text{D}$.
Montrer que cette similitude est une rotation, et préciser ses éléments caractéristiques.

3. Soit J le point d'affixe $3+5\text{i}$.
Montrer que la rotation R de centre J et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ transforme A en D et C en B.

4. On appelle I le point d'affixe $1+\text{i}$, M et N les milieux respectifs de segments [AC] et [BD].
Déterminer, en utilisant les résultats des questions précédentes, la nature du quadrilatère IMJN.

5. On considère les points P et Q tels que les quadrilatères IAPB et ICQD sont des carrés directs.

1. Calculer les affixes z_P et z_Q des points P et Q.
2. Déterminer $\dfrac{\text{I}P}{\text{IA}}$ et $\dfrac{\text{I}Q}{\text{IC}}$ ainsi qu'une mesure des angles $\left(\overrightarrow{\text{IA}}, \overrightarrow{\text{I}P}\right)$ et $\left(\overrightarrow{\text{IC}}, \overrightarrow{\text{I}Q}\right)$.
   En déduire les éléments caractéristiques de la similitude directe g telle que $g(\text{A}) = P$ et $g(\text{C}) = Q$.
3. En déduire que J est l'image de M par g. Que peut-on en déduire pour J ?

99 Polynésie juin 2004

Retour au tableau

Le plan P est rapporté a un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 3 cm.
On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives a, b, c et d telles que

$$\mathrm{a} = 3 \qquad \mathrm{b} = 1 + \frac{2}{3}\mathrm{i} \qquad \mathrm{c} = 3\mathrm{i} \quad \text{et} \quad \mathrm{d} = -\frac{1}{3}\mathrm{i}.$$

1. Représenter les points A, B, C et D.

2. Déterminer l'angle θ et le rapport k de la similitude directe s transformant A en B et C en D.

3. Donner l'écriture complexe de s. En déduire l'affixe du centre I de s.

4. Soit M le point de coordonnées $(x\ ;\ y)$ et $M'(x'\ ;\ y')$ son image par s.

Montrer que : $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & -\dfrac{1}{3}y + 1 \\ y' & = & \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

5. On construit une suite (M_n) de points du plan en posant

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathrm{M}_0 & = & \mathrm{A} \\ \multicolumn{3}{l}{\text{et, pour tout entier naturel } n} \\ M_{n+1} & = & s(M_n) \end{array}\right.$$

Pour tout entier naturel, on note z_n l'affixe du point M_n et on pose $r_n = |z_n - 1|$.

1. Montrer que (r_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
2. Déterminer le plus petit entier naturel k tel que $\mathrm{I}M_k \leqslant 10^{-3}$.

100 Pondichery avril 2004

Retour au tableau

L'espace (E) est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points A(0 ; 5 ; 5) et B(0 ; 0 ; 10).

1. Dans cette question, on se place dans le plan P_0 d'équation $x = 0$ rapporté au repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre B passant par A.
Démontrer que la droite (OA) est tangente au cercle $\mathscr{C}$.

2. On nomme $\mathscr{S}$ la sphère engendrée par la rotation du cercle $\mathscr{C}$ autour de l'axe (Oz) et Γ le cône engendré par la rotation de la droite (OA) autour de l'axe (Oz).

   1. Démontrer que le cône Γ admet pour équation $x^2 + y^2 = z^2$.

   2. Déterminer l'intersection du cône Γ et de la sphère $\mathscr{S}$.
   Préciser la nature de cette intersection et ses éléments caractéristiques.

   3. Illustrer ces objets par un schéma dans l'espace.

3. On coupe le cône Γ par le plan P_1 d'équation $x = 1$.
Dans P_1, l'une des trois figures ci-dessous représente cette intersection.
Identifier cette figure en donnant les justifications nécessaires.

4. Soit $M(x,\ y,\ z)$ un point du cône Γ dont les coordonnées sont des entiers relatifs non nuls. Démontrer que x et y ne peuvent pas être simultanément impairs.

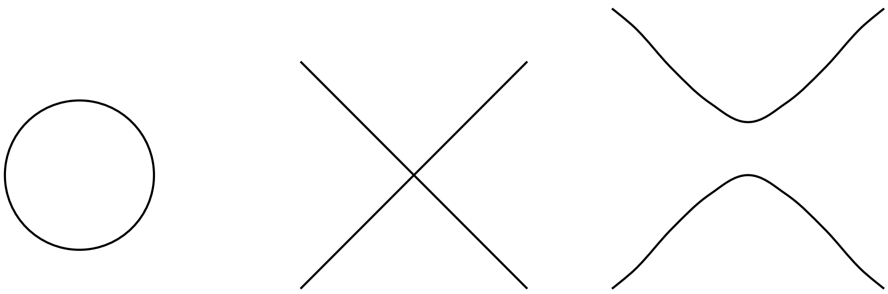


Figure 1 Figure 2 Figure 3

101 La Réunion juin 2004

Retour au tableau

On rappelle la propriété, connue sous le nom de petit théorème de Fermat : « soit p un nombre premier et a un entier naturel premier avec p ; alors $a^{p-1}-1$ est divisible par p ».

1. Soit p un nombre premier impair.

1. Montrer qu'il existe un entier naturel k, non nul, tel que $2^k \equiv 1 \quad [p]$.
2. Soit k un entier naturel non nul tel que $2^k \equiv 1 \quad [p]$ et soit n un entier naturel. Montrer que, si k divise n, alors $2^n \equiv 1 \quad [p]$.
3. Soit b tel que $2^b \equiv 1 \quad [p]$, b étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété. Montrer, en utilisant la division euclidienne de n par b, que si $2^n \equiv 1 \quad [p]$, alors b divise n.

2. Soit q un nombre premier impair et le nombre $A = 2^q - 1$.
On prend pour p un facteur premier de A.

1. Justifier que : $2^q \equiv 1 \quad [p]$.
2. Montrer que p est impair.
3. Soit b tel que $2^b \equiv 1 \quad [p]$, b étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété. Montrer, en utilisant **1.** que b divise q. En déduire que $b = q$.
4. Montrer que q divise $p-1$, puis montrer que $p \equiv 1 \quad [2q]$.

3. Soit $A_1 = 2^{17}-1$. Voici la lisle des nombres premiers inférieurs à 400 et qui sont de la forme $34m+1$, avec m entier non nul : 103, 137, 239, 307. En déduire que A_1 est premier.

102 Amérique du Sud novembre 2003

Retour au tableau

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 1 cm).

On note r_1 la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et r_2 la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{5}$.

Partie A

1. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $3y = 5(15 - x)$.
2. Soit I le point d'affixe 1.
   On considère un point A mobile sur le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ de centre O.
   Sa position initiale est en I.
   On appelle d la distance, exprimée en centimètres, qu'a parcourue le point A sur le cercle $\mathcal{C}$ après avoir subi p rotations r_1 et q rotations r_2 (p et q étant des entiers naturels).
   On convient que lorsque A subit la rotation r_1 (respectivement r_2), il parcourt une distance de $\frac{\pi}{3}$cm (respectivement $\frac{\pi}{5}$ cm).
   Déterminer toutes les valeurs possibles de p et q pour lesquelles le point A a parcouru exactement deux fois et demie la circonférence du cercle $\mathcal{C}$ à partir de I.

Partie B

On note h_1 l'homothétie de centre O et de rapport 4 et h_2 l'homothétie de centre O et de rapport -6. On pose $s_1 = r_1 \circ h_1$ et $s_2 = r_2 \circ h_2$.

1. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de s_1 et s_2.
2. On pose :
   $S_m = s_1 \circ s_1 \cdots \circ s_1$ (composée de m fois s_1, m étant un entier naturel non nul),
   $S'_n = s_2 \circ s_2 \cdots \circ s_2$ (composée de n fois s_2, n étant un entier naturel non nul), et $f = S'_n s_1 \circ S_m$.
   1. Justifier que f est la similitude directe de centre O, de rapport $2^{2m+n} \times 3^n$ et d'angle $m\frac{\pi}{3} + n\frac{6\pi}{5}$.
   2. f peut-elle être une homothétie de rapport 144 ?
   3. On appelle M le point d'affixe 6 et M$'$ son image par f.
      Peut-on avoir OM$' = 240$?
      Démontrer qu'il existe un couple d'entiers naturels unique $(m,\ n)$ tel que OM$' = 576$.
      Calculer alors la mesure principale de l'angle orienté $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}\right)$.

103 Nouvelle–Calédonie novembre 2003

Retour au tableau

1.

1. Soit p un entier naturel. Montrer que l'un des trois nombres p, $p+10$ et $p+20$, et l'un seulement est divisible par 3.
2. Les entiers naturels $a,\ b$ et c sont dans cet ordre les trois premiers terme d'une suite arithmétique de raison 10. Déterminer ces trois nombres sachant qu'ils sont premiers.

2. Soit E l'ensemble des triplets d'entiers relatifs $(u,\ v,\ w)$ tels que

$$3u+13v+23w=0.$$

1. Montrer que pour un tel triplet $v \equiv w \pmod{3}$
2. On pose $v=3k+r$ et $w=3k'+r$ où $k,\ k'$ et r sont des entiers relatifs et $0 \leqslant r \leqslant 2$.
   Montrer que les éléments de E sont de la forme :
   $$(-13k-23k'-12r,\ 3k+r,\ 3k'+r).$$
3. l'espace est rapporté à un repère orthonormal d'origine O et soit P le plan d'équation $3x+13y+23z=0$.
   Déterminer l'ensemble des points M à coordonnées $(x,\ y,\ z)$ entières relatives appartenant au plan P et situés à l'intérieur du cube de centre O, de côté 5 et dont les arêtes sont parallèles aux axes.

104 Antilles septembre 2003

Retour au tableau

Soit l'équation (1) d'inconnue rationnelle x :

$$78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0.$$

où u et v sont des entiers relatifs.

1. On suppose dans cette question que $\dfrac{14}{39}$ est solution de l'équation (1).

1. Prouver que les entiers relatifs u et v sont liés par la relation $14u + 39v = 1\,129$.
2. Utiliser l'algorithme d'Euclide, en détaillant les diverses étapes du calcul, pour trouver un couple $(x\ ;\ y)$ d'entiers relatifs vérifiant l'équation $14x + 39y = 1$.
   Vérifier que le couple $(-25\ ;\ 9)$ est solution de cette équation.
3. En déduire un couple $(u_0\ ;\ v_0)$ solution particulière de l'équation $14u + 39v = 1\,129$.
   Donner la solution générale de cette équation c'est-à-dire l'ensemble des couples $(u\ ;\ v)$ d'entiers relatifs qui la vérifient.
4. Déterminer, parmi les couples $(u\ ;\ v)$ précédents, celui pour lequel le nombre u est l'entier naturel le plus petit possible.

2.

1. Décomposer 78 et 14 en facteurs premiers.
   En déduire, dans $\mathbb{N}$, l'ensemble des diviseurs de 78 et l'ensemble des diviseurs de 14.
2. Soit $\dfrac{P}{Q}$ une solution rationnelle de l'équation (1) d'inconnue x :

$$78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0 \quad \text{où} \quad u \quad \text{et} \quad v \quad \text{sont des entiers relatifs.}$$

   Montrer que si P et Q sont des entiers relatifs premiers entre eux, alors P divise 14 et Q divise 78.
3. En déduire le nombre de rationnels, non entiers, pouvant être solutions de l'équation (1) et écrire, parmi ces rationnels, l'ensemble de ceux qui sont positifs.

105 Métropole septembre 2003

Retour au tableau

On rappelle que 2 003 est un nombre premier.

1.

1. Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que :

$$123u + 2003v = 1.$$

2. En déduire un entier relatif k_0 tel que :

$$123k_0 \equiv 1 \quad [2003].$$

3. Montrer que, pour tout entier relatif x,

$$123x \equiv 456 \quad [2003] \text{si et seulement si } x \equiv 456k_0 \quad [2003].$$

4. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x tels que :

$$123x \equiv 456 \quad [2003].$$

5. Montrer qu'il existe un unique entier n tel que :

$$1 \leqslant n \leqslant 2002 \quad \text{et} \quad 123n \equiv 456 \quad [2003].$$

2. Soit a un entier tel que : $1 \leqslant a \leqslant 2002$.

1. Déterminer :

$$\text{PGCD}(a,\ 2003).$$

En déduire qu'il existe un entier m tel que :

$$am \equiv 1 \quad [2003].$$

2. Montrer que, pour tout entier b, il existe un unique entier x tel que :

$$0 \leqslant x \leqslant 2002 \quad \text{et} \quad ax \equiv b \quad [2003].$$

106 Polynésie septembre 2003

Retour au tableau

On désigne par p un nombre entier premier supérieur ou égal à 7.
Le but de l'exercice est de démontrer que l'entier naturel $n = p^4 - 1$ est divisible par 240, puis d'appliquer ce résultat.

1. Montrer que p est congru à -1 ou à 1 modulo 3. En déduire que n est divisible par 3.
2. En remarquant que p est impair, prouver qu'il existe un entier naturel k tel que $p^2 - 1 = 4k(k+1)$, puis que n est divisible par 16.
3. En considérant tous les restes possibles de la division euclidienne de p par 5, démontrer que 5 divise n.
4.
   1. Soient a, b et c trois entiers naturels.
      Démontrer que si a divise c et b divise c, avec a et b premiers entre eux, alors ab divise c.
   2. Déduire de ce qui précède que 240 divise n.
5. Existe-t-il quinze nombres premiers $p_1,\ p_2, \dots,\ p_{15}$ supérieurs ou égaux à 7 tels que l'entier $A = p_1^4 + p_2^4 + \dots + p_{15}^4$ soit un nombre premier ?

107 Amérique du Nord juin 2003

Retour au tableau

Dans le plan complexe rapporté à un repŘère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, d'unité graphique 1 cm, on considère les points A_0, A_1, A_2 d'affixes respectives $z_0 = 5-4\text{i}$, $z_1 = -1-4\text{i}$, $z_2 = -4-\text{i}$.

1.
 1. Justifier l'existence d'une unique similitude directe S telle que $S(\text{A}_0) = \text{A}_1$ et $S(\text{A}_1) = \text{A}_2$.
 2. Établir que l'écriture complexe de S est $z' = \dfrac{1-\text{i}}{2}z + \dfrac{-3+\text{i}}{2}$.
 3. En déduire le rapport, l'angle et l'affixe ω du centre Ω de la similitude S.
 4. On considère un point M, d'affixe z avec $z\eta \neq 0$, et son image M', d'affixe z'.
 Vérifier la relation : $\omega - z' = \text{i}(z - z')$; en déduire la nature du triangle $\Omega MM'$.

2. Pour tout entier naturel n, le point A_{n+1}, est défini par $\text{A}_{n+1} = S(\text{A}_n)$ et on pose $u_n = \text{A}_n\text{A}_{n+1}$.

 1. Placer les points A_0, A_1, A_2 et construire géométriquement les points A_3, A_4, A_5, A_6.
 2. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique.

3. La suite (v_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

 1. Exprimer v_n en fonction de n.
 2. La suite (v_n) est-elle convergente ?

4.
 1. Calculer en fonction de n le rayon r_n du cercle circonscrit au triangle $\Omega\text{A}_n\text{A}_{n+1}$.
 2. Déterminer le plus petit entier naturel p tel que, pour tout entier naturel n :
 si $n > p$ alors $r_n < 10^{-2}$.

108 Antilles juin 2003

Retour au tableau

1.

1. Calculer : $\left(1+\sqrt{6}\right)^2$, $\left(1+\sqrt{6}\right)^4$, $\left(1+\sqrt{6}\right)^6$.
2. Appliquer l'algorithme d'Euclide à 847 et 342. Que peut-on en déduire ?

2. Soit n un entier naturel non nul. On note a et b les entiers naturels tels que :

$$\left(1+\sqrt{6}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{6}.$$

Que valent a_1 et b_1 ?

D'après les calculs de la question **1 a**, donner d'autres valeurs de a_n et b_n.

1. Calculer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
2. Démontrer que, si 5 ne divise pas $a_n + b_n$, alors 5 ne divise pas non plus $a_{n+1} + b_{n+1}$.
   En déduire que, quel que soit n entier naturel non nul, 5 ne divise pas $a_n + b_n$.
3. Démontrer que, si a_n et b_n sont premiers entre eux, alors a_{n+1} et b_{n+1} sont premiers entre eux.
   En déduire que, quel que soit n entier naturel non nul, a_n et b_n sont premiers entre eux.

109 Asie juin 2003

Retour au tableau

1.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $3n^2 - 11n + 48$ est divisible par $n + 3$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $3n^2 - 9n + 16$ est un entier naturel non nul.

2. Montrer que, pour tous les entiers naturels non nuls a, b et c, l'égalité suivante est vraie :

$$\text{PGCD}(a\,;\, b) = \text{PGCD}(bc - a\,;\, b).$$

3. Montrer que, pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 2, l'égalité suivante est vraie :

$$\text{PGCD}(3n^3 - 11n\,;\, n + 3) = \text{PGCD}(48\,;\, n + 3).$$

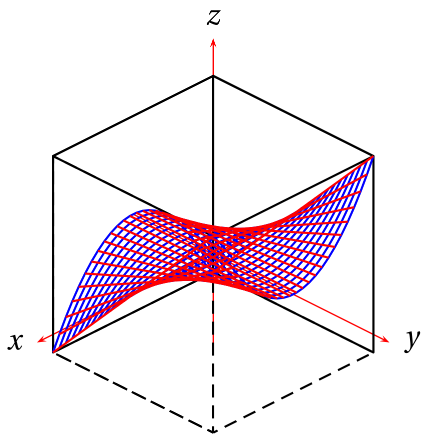
4.

1. Déterminer l'ensemble des diviseurs entiers naturels de 48.
2. En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que $\dfrac{3n^3 - 11n}{n + 3}$ soit un entier naturel.

110 Centres étrangers juin 2003

Retour au tableau

L'espace (E) est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ ,\ \vec{k}\right)$. On considère la surface **T** d'équation : $x^2y = z \quad \text{avec} -1 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{et} -1 \leqslant y \leqslant 1$. La figure ci-contre est une représentation de la surface **T**, dans le cube de centre O et de côté 2.



1. Éléments de symétrie de la surface **T**.

1. Montrer que si le point $M(x,\ y,\ z)$ appartient à **T**, alors le point $M'(-x,\ y,\ z)$ appartient aussi à **T**. En déduire un plan de symétrie de **T**.
2. Montrer que l'origine O du repère est centre de symétrie de **T**.

2. Intersections de la surface **T** avec des plans parallèles aux axes.

1. Déterminer la nature des courbes d'intersection de **T** avec les plans parallèles au plan (xOz).
2. Déterminer la nature des courbes d'intersection de **T** avec les plans parallèles au plan $(y\text{O}z)$.

3. Intersections de la surface **T** avec les plans parallèles au plan $(x\text{O}y)$ d'équations $z = k$, avec $k \in [0\ ;\ 1]$.

1. Déterminer l'intersection de la surface **T** et du plan d'équation $z = 0$.
2. Pour $k > 0$ on note K le point de coordonnées $(0,\ 0,\ k)$. Déterminer, dans le repère $\left(K\ ;\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\right)$, l'équation de la courbe d'intersection de **T** et du plan d'équation $z = k$.
3. Tracer l'allure de cette courbe dans le repère $\left(K\ ;\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\right)$. On précisera en particulier les coordonnées des extrémités de l'arc.

4. On note (D) le domaine formé des points du cube unité situés sous la surface **T**.

$$(\text{D}) = M(x,\ y,\ z) \in (E) \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1\ ; 0 \leqslant y \leqslant 1\ ;\ 0 \leqslant z \leqslant x^2y.$$

1. Pour $0 < k \leqslant 1$, le plan d'équation $z = k$ coupe le domaine (D) selon une surface qu'on peut visualiser sur le graphique de la **question 3 c**.

   C'est l'ensemble des points M du cube unitéŐ, de coordonnŐées $(x,\ y,\ z)$ tels que $y \geqslant \dfrac{k}{x^2}$ et $z = k$.
   Calculer en fonction de k l'aire $S(k)$ exprimée en unités d'aire, de cette surface.
2. On pose $S(0) = 1$; calculer en unités de volume, le volume V du domaine (D).

   On rappelle que $V = \displaystyle\int_0^1 S(k)\,\text{d}k$.

111 Métropole juin 2003

Retour au tableau

Les questions **3** *et* **4** *sont indépendantes des questions* **1** *et* **2** *seule l'équation de* Γ *donnée en* **1 c** *intervient à la question* **4**.

1. L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

  1. Montrer que les plans P et Q d'équations respectives $x + y\sqrt{3} - 2z = 0$ et $2x - z = 0$ ne sont pas parallèles.

  2. Donner un système d'équations paramétriques de la droite Δ intersection des plans P et Q.

  3. On considère le cône de révolution Γ d'axe (Ox) contenant la droite Δ comme génératrice.
  Montrer que Γ pour équation cartésienne $y^2 + z^2 = 7x^2$.

2. On a représenté sur les deux figures ci-dessous les intersections de l avec des plans parallèles aux axes de coordonnées.
Determiner dans chaque cas une équation des plans possibles, en justifiant avec soin votre réponse.

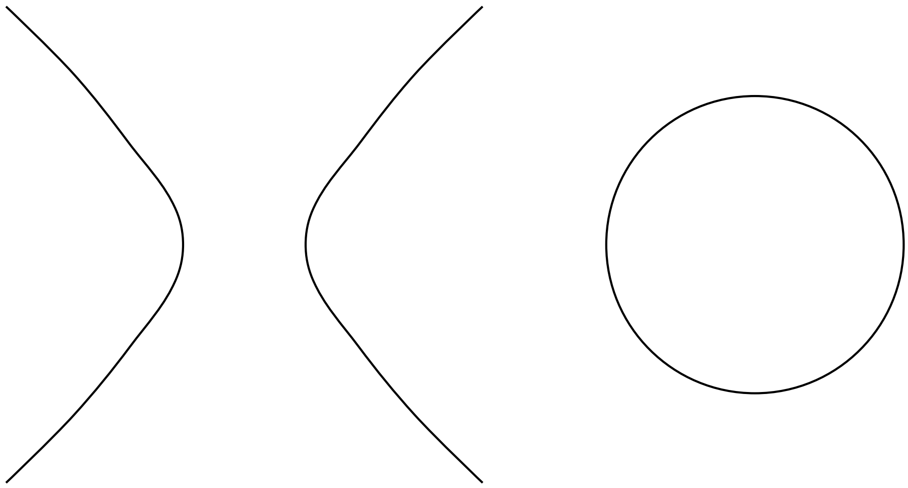


Figure 1 Figure 2

3. **1.** Montrer que l'équation $x^2 \equiv 3 \quad [7]$, dont l'inconnue x est un entier reIatif, n'a pas de solution,

  2. Montrer la propriété suivante :
  pour tous entiers relatifs a et b, si 7 divise $a^2 + b^2$ alors 7 divise a et 7 divise b.

4. **1.** Soient $a,\ b$ et c des entiers relatifs non nuls. Montrer la propriété suivante :
  si le point A de coordonnées $(a,\ b,\ c)$ est un point du cône Γ alors $a,\ b$ et c sont divisibles par 7.

  2. En déduire que le seul point de Γ dont les coordonnées sont des entiers relatifs est le sommet de ce cône.

112 La Réunion juin 2003

Retour au tableau

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. On prendra 1 cm, pour unité graphique.
On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = -\left(\sqrt{3}+\text{i}\right)z - 1 + \text{i}\left(1+\sqrt{3}\right).$$

1. Montrer que f est une similitude directe dont le centre Ω a pour affixe i. En déterminer le rapport et l'angle.

2. Soit M_0 le point d'affixe $z_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{3}{4}\text{i}$.

Calculer ΩM_0 et donner une mesure en radians de l'angle $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{\Omega\text{M}_0}\right)$.

3. On considŘère la suite de points $(M_n)_{n\geqslant 0}$, définie pour tout entier naturel n par $M_{n+1} = f(M_n)$. On note z_n l'affixe du point M_n.

  1. Placer les points Ω, M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4.
  2. Montrer par récurrence, pour tout entier naturel n, l'égalité :

$$z_n - \text{i} = 2^n \text{e}^{\text{i}\frac{7n\pi}{6}}\left(z_0 - \text{i}\right).$$

  3. Pour tout entier naturel n, calculer ΩM_n, puis déterminer le plus petit entier n tel que $\Omega M_n \geqslant 10^2$.

4.
  1. On considère l'équation (E) : $7x - 12y = 1$ où x et y sont deux entiers relatifs. Après avoir vérifié que le couple $(-5\ ;\ -3)$ est solution, résoudre l'équation (E).
  2. Soit Δ l'ensemble des points M du plan d'affixe z telle que $\text{Im}(z) = 1$ et $\text{Re}(z) \geqslant 0$.
  Caractériser géomtriquement Δ et le représenter.
  Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartienne à la demi-droite d'origine Ω dirigée par le vecteur $\vec{u}$. Préciser son plus petit élément.

113 Liban juin 2003

Retour au tableau

Les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{array}{lll} x_0 = 3 & \text{et} & x_{n+1} = 2x_n - 1 \\ y_0 = 1 & \text{et} & y_{n+1} = 2y_n + 3. \end{array}$$

1. Démontrer par recurrence que pour tout entier naturel n, $x_n = 2^{n+1} + 1$.

2.
 1. Calculer le pgcd de x_8 et x_9, puis celui de x_{2002} et x_{2003}. Que peut-on en déduire pour x_8 et x_9 d'une part, pour x_{2002} et x_{2003} d'autre part ?
 2. x_n et x_{n+1} sont-ils premiers entre eux pour tout entier naturel n ?

3.
 1. Démontrer que pour tout entier naturel n, $2x_n - y_n = 5$.
 2. Exprimer y_n en fonction de n.
 3. En utilisant les congruences modulo 5, étudier suivant les valeurs de l'entier naturel p le reste de la division euclidienne de 2^p par 5.
 4. On note d_n le pgcd de x_n et y_n pour tout entier naturel n.
 Démontrer que l'on a $d_n = 1$ ou $d_n = 5$; en déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que x_n et y_n soient premiers entre eux.

114 Polynésie juin 2003

Retour au tableau

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, d'unité graphique 2 cm.

On donne les points A, C, D et Ω, d'affixes respectives $1 + i$, 1, 3 et $2 + \frac{1}{2}i$.

Partie A

1. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre Ω passant par A.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ passe par C et D.
2. Montrer que le segment [AD] est un diamètre de $\mathcal{C}$.
3. Sur une feuille de papier millimétré, faire une figure en plaçant les points A, C, D, Ω et tracer $\mathcal{C}$. On note B la seconde intersection de $\mathcal{C}$ avec la droite (OA) .
4. Montrer que le point O est extéŐrieur au segment [AB].

2. Montrer par un raisonnement géométrique simple que les triangles OAD et OCB sont semblables mais non isométriques.
Soit S la similitude qui transforme le triangle OCB en le triangle OAD.

1. Montrer que S est une similitude indirecte différente d'une réflexion.
2. Quel est le centre de S ?

Partie B

1.
1. Déduire de la partie **A 2** que l'on a $OA \times OB = OC \times OD$.
2. En déduire le module de l'affixe z_B du point B. Déterminer un argument de z_B.

2. Déterminer l'écriture complexe de S.

3. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $S \circ S$.

115 Pondichéry juin 2003

Retour au tableau

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

Première partie

ABC est un triangle direct du plan orienté.
On désigne respectivement par I, J et K les milieux de [AB], [BC] et [CA].
Soit α un réel qui conduit à la réalisation de la figure jointe sur laquelle on raisonnera. Cette figure sera jointe à la copie.
d_1 est l'image de la droite (AB) par la rotation de centre I et d'angle α.
d_2 est l'image de la droite (BC) par la rotation de centre J et d'angle α.
d_3 est l'image de la droite (CA) par la rotation de centre K et d'angle α.
A_1 est le point d'intersection de d_1 et d_3, B_1 celui de d_1 et d_2 et C_1 celui de d_2 et d_3.

1. On appelle H le point d'intersection de (BC) et d_1. Montrer que les triangles HIB et HB_1J sont semblables.
2. En déduire que les triangles ABC et $A_1B_1C_1$ sont semblables.

Deuxième partie Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $\left(O,\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

A - Construction de la figure

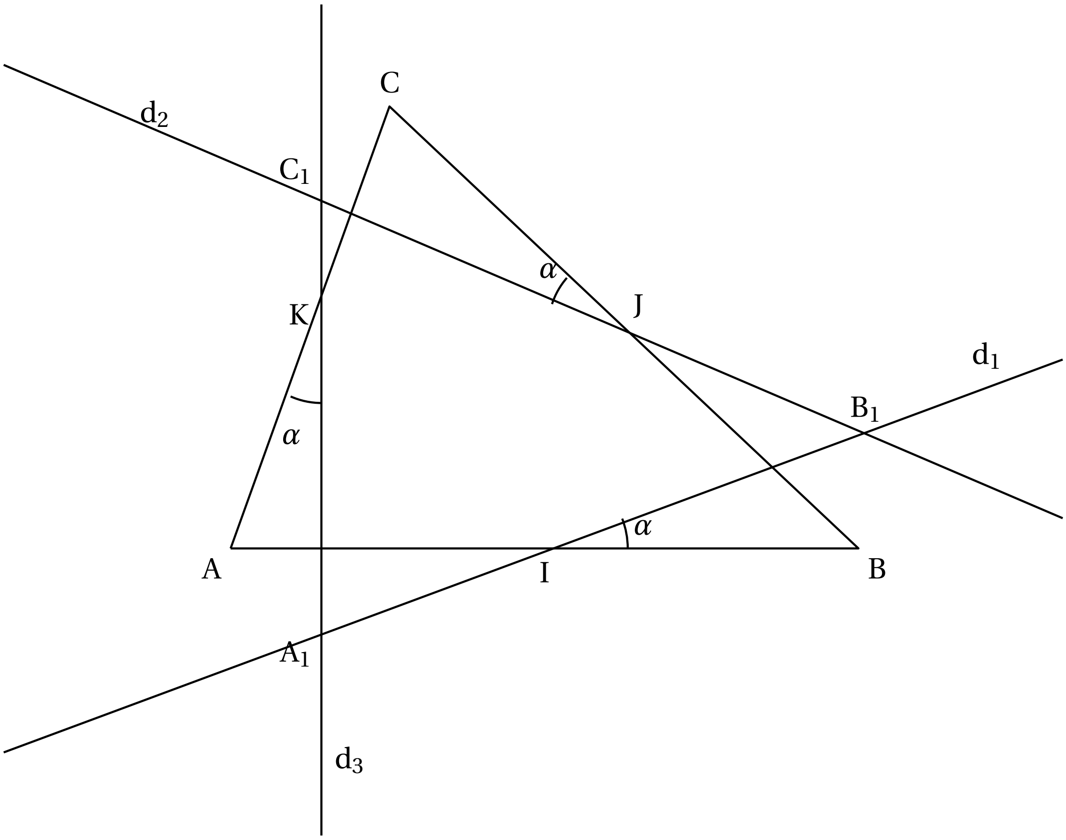
1. Placer les points $A(-4-6i)$, $B(14)$, $C(-4+6i)$, $A_1(3-7i)$, $B_1(9+5i)$ et $C_1(-3-i)$.
2. Calculer les affixes des milieux I, J et K des segments [AB], [BC] et [CA]. Placer ces points sur la figure.
3. Montrer que A_1, I, B_1 sont alignés.
   On admettra que B_1, J, C_1 *d'une part et* C_1, K, A_1 *d'autre part sont alignés.*
4. Déterminer une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{IB},\ \overrightarrow{IB_1}\right)$.
   On admettra que $\left(\overrightarrow{KA},\ \overrightarrow{KA_1}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ *et que* $\left(\overrightarrow{JC},\ \overrightarrow{JC_1}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.
5. Quelle est l'image de la droite (AB) par la rotation de centre I et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$?

B - Recherche d'une similitude directe transformant ABC en $A_1B_1C_1$

On admet qu'il existe une similitude directe s transformant les points A, B et C en A_1, B_1 et C_1.

1. Montrer que l'écriture complexe de s est $z' = \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)z+2-2i$, où z et z' désignent respectivement les affixes d'un point et de son image par s.
2.
   1. Déterminer le rapport et l'angle de s.
   2. Déterminer l'affixe du centre Ω de s.
3. Que représente le point Ω pour ABC ?

Le candidat joindra cette figure à sa copie


C
d2
C1
α
J
K
d1
B1
α
α
A
I
B
A1
d3

116 Amérique du Sud décembre 2002

Retour au tableau

On considère la suite d'entiers définie par $a_n = 111\ldots11$ (l'écriture décimale de a_n est composée de n chiffres 1). On se propose de montrer que l'un, au moins, des termes de la suite est divisible par 2 001.

1. En écrivant a_n sous la forme d'une somme de puissances de 10, montrer que pour tout entier naturel n non nul, $a_n = \dfrac{10^n - 1}{9}$.

2. On considère la division euclidienne par 2 001 : expliquer pourquoi parmi les 2 002 premiers termes de la suite, il en existe deux, au moins, ayant le même reste.

Soit a_n et a_p deux termes de la suite admettant le même reste ($n < p$).

Quel est le reste de la division euclidienne de $a_p - a_n$ par 2 001 ?

3. Soit k et m deux entiers strictement positifs vérifiant $k < m$.

Démontrer l'égalité $a_m - a_n = a_{m-n} \times 10^k$.

4. Calculer le PGCD de 2 001 et de 10.

Montrer que si 2 001 divise $a_m - a_k$, alors 2 001 divise a_{m-k}.

5. Démontrer alors que l'un, au moins, des termes de la suite est divisible par 2 001.

117 Nouvelle–Calédonie novembre 2002

Retour au tableau

On considère deux entiers naturels, non nuls, x et y premiers entre eux.
On pose $S = x + y$ et $P = xy$.

1.
  1. Démontrer que x et S sont premiers entre eux, de même que y et S.

  2. En déduire que $S = x + y$ et $P = xy$ sont premiers entre eux.

  3. Démontrer que les nombres S et P sont de parités différentes (l'un pair, l'autre impair).

2. Déterminer les diviseurs positifs de 84 et les ranger par ordre croissant.

3. Trouver les nombres premiers entre eux x et y tels que : $SP = 84$.

4. Déterminer les deux entiers naturels a et b vérifiant les conditions suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l c l} a+b & = & 84\\ ab & = & d^3 \end{array}\right. \text{ avec } d = \text{pgcd}(a\,;b)$$

(On pourra poser $a = dx$ et $b = dy$ avec x et y premiers entre eux)

118 Antilles–Guyane septembre 2002

Retour au tableau

Dans le plan, on considère deux segments [AC] et [BD] tels que

$$\text{AC} = \text{BD} \qquad \text{et} \qquad \left(\widehat{\overrightarrow{\text{AC}}\,,\,\overrightarrow{\text{BD}}}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

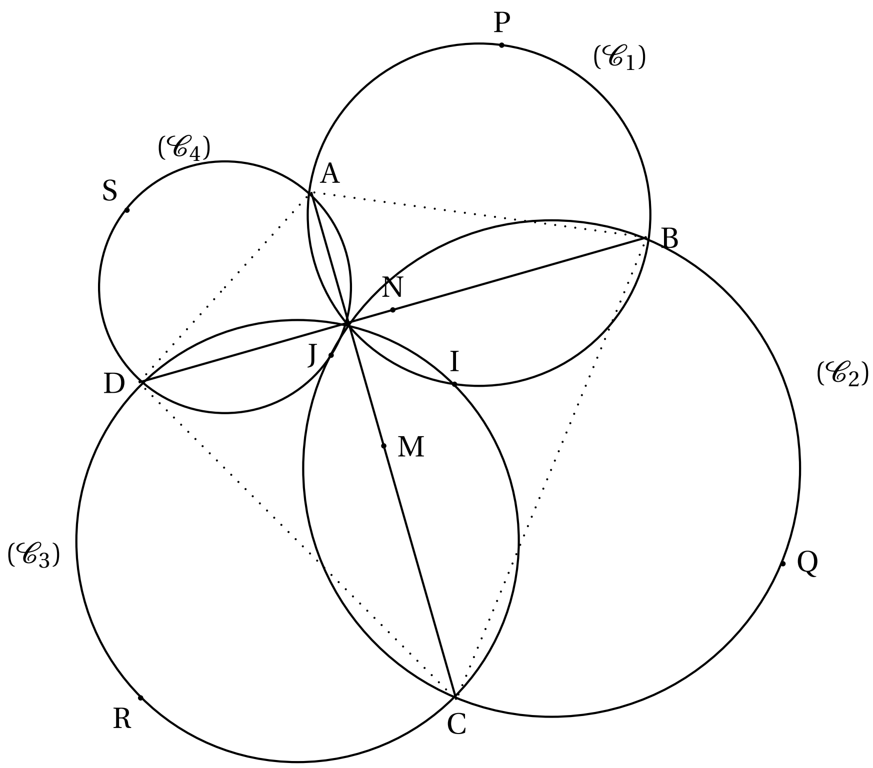
On désigne par M le milieu de [AC] et par N celui de [BD]. On appelle $(\mathscr{C}_1)$, $(\mathscr{C}_2)$, $(\mathscr{C}_3)$ et $(\mathscr{C}_4)$ les cercles de diamètres respectifs [AB], [BC] , [CD] et [DA].
On pourra s'aider de la figure ci-jointe.

1.

1. Soit r la rotation qui transforme A en B et C en D. Quel est l'angle de r ? Montrer que le centre I de r appartient aux cercles $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_3)$.
2. Soit r' la rotation qui transforme A en D et C en B. Quel est l'angle de r' ? Montrer que le centre J de r' appartient aux cercles $(\mathscr{C}_2)$ et $(\mathscr{C}_4)$.
3. Quelle est la nature du quadrilatère INJM ? On désigne par P et R les points diamètralement opposés à I sur, respectivement, $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_3)$ et par Q et S les points diamètralement opposés à J sur, respectivement, $(\mathscr{C}_2)$ et $(\mathscr{C}_4)$.

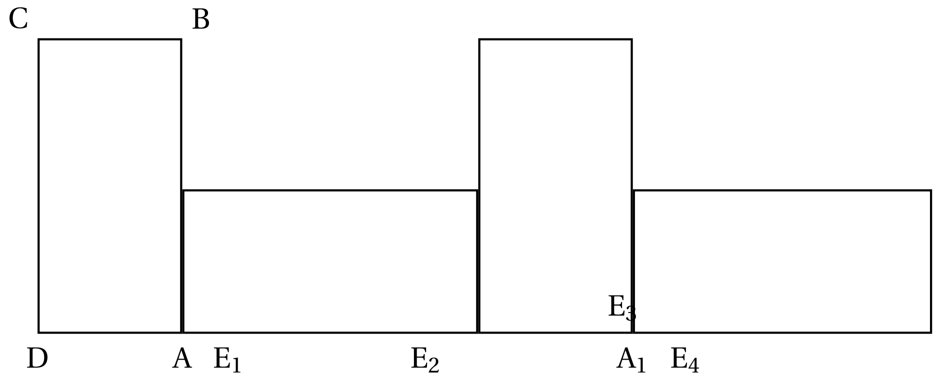
2. Soit s la similitude directe de centre I, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

1. Quelles sont les images par s des points D, N, B ?
2. En déduire que J est le milieu de [PR].



119 Métropole septembre 2002

Retour au tableau



On considère un rectangle direct ABCD vérifiant : AB = 10 cm et AD = 5 cm.

1. Faire une figure : construire ABCD, puis les images respectives M, N et P de B, C et D par la rotation r de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

2.
   1. Construire le centre Ω de la rotation r' qui vérifie $r'(\text{A}) = \text{N}$ et $r'(\text{B}) = \text{P}$. Déterminer l'angle de r'.
   2. Montrer que l'image de ABCD par r' est AMNP.
   3. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $r^{-1} \circ r'$.

3. On considère les images successives des rectangles ABCD et AMNP par la translation de vecteur $\overrightarrow{\text{DM}}$. Sur la demi-droite [DA), on définit ainsi la suite de points $(A_k)_{k \geqslant 1}$ vérifiant, en cm, $\text{D}A_k = 5 + 15k$. Sur la même demi-droite, on considère la suite de points $(E_n)_{n \geqslant 1}$ vérifiant, en cm, $\text{D}E_n = 6,55n$.

   1. Déterminer l'entier k tel que E_{120} appartienne à $[A_k, A_{k+1}]$. Que vaut la longueur A_kE_{120} en cm ?
   2. On cherche dans cette question pour quelle valeur minimale n_0 le point E_{n_0} est confondu avec un point A_k.
   Montrer que si un point E_n est confondu avec un point A_k alors $131n - 300k = 100$.
   Vérifier que les nombres $n = 7\,100$ et $k = 3\,100$ forment une solution de cette équation.
   Déterminer la valeur minimale n_0 recherchée.

120 Amérique du Nord juin 2002

Retour au tableau

Soit (E) l'ensemble des entiers naturels écrits, en base 10, sous la forme $\overline{abba}$ où a est un chiffre supérieur ou égal à 2 et b est un chiffre quelconque.
Exemples d'éléments de (E) : 2 002 ; 3 773 ; 9 119.
Les parties A et B peuvent être traitées séparément.

Partie A : Nombre d'éléments de (E) ayant 11 comme plus petit facteur premier.

1.
   1. Décomposer 1 001 en produit de facteurs premiers.
   2. Montrer que tout élément de (E) est divisible par 11.
2.
   1. Quel est le nombre d'éléments de (E) ?
   2. Quel est le nombre d'éléments de (E) qui ne sont ni divisibles par 2 ni par 5 ?
3. Soit n un élément de (E) s'écrivant sous la forme $\overline{abba}$.
   1. Montrer que : « n est divisible par 3 » équivaut à « $a+b$ est divisible par 3 ».
   2. Montrer que : « n est divisible par 7 » équivaut à « b est divisible par 7 ».
4. Déduire des questions précédentes le nombre d'éléments de (E) qui admettent 11 comme plus petit facteur premier.

Partie B : Étude des éléments de (E) correspondant à une année bissextile.

Soit (F) l'ensemble des éléments de (E) qui correspondent à une année bissextile.
On admet que pour tout élément n de (F), il existe des entiers naturels p et q tels que :

$$n = 2000 + 4p \quad \text{et} \quad n = 2002 + 11q.$$

1. On considère l'équation (e) : $4p - 11q = 2$ où p et q sont des entiers relatifs.
   Vérifier que le couple (6, 2) est solution de l'équation (e) puis résoudre l'équation (e).
2. En déduire que tout entier n de (F) peut s'écrire sous la forme $2\,024 + 44\,k$ où k est un entier relatif.
3. À l'aide de la calculatrice déterminer les six plus petits éléments de (F).
   N.B. : Liste des nombres premiers inférieurs à 40 :
   2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37.

121 Antilles–Guyane juin 2002

Retour au tableau

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\mathrm{OI}}, \overrightarrow{\mathrm{OJ}}\right)$ (unité graphique 4 cm)

1. On considère les points A, B , C , D et E d'affixes respectives :

$$Z_{\mathrm{A}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}},\ Z_{\mathrm{B}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}},\ Z_{\mathrm{C}} = -1,\ Z_{\mathrm{D}} = -\mathrm{i} \text{ et } Z_{\mathrm{E}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}.$$

  1. Faire la figure

  2. Montrer que EA = ED et que EB = EC. Montrer que (OE) est la médiatrice du segment [AD] et du segment [BC]

  3. Déterminer les points K et L images respectives de A et de B par la translation t de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OI}}$. Placer les points K et L sur la figure.

2. On considère l'application F qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe $Z' = \left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{Z}$ où $\overline{Z}$ désigne le conjugué de Z.

  1. Justifier l'égalité $F = R \circ S$ où S est la réflexion ou symétrie axiale d'axe (OI) et R une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

  2. Montrer que F est une réflexion dont on précisera l'axe.

3. Soit G l'application qui, à tout point M d'affixe Z associe le point M'' dont l'affixe Z'' définie par la formule $Z'' = \left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{Z} + 1$.

Déterminer une application T telle que $G = T \circ F$. En déduire que G est un antidéplacement.

122 Asie juin 2002

Retour au tableau

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par $x_0 = 1,\ y_0 = 8$ et

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & \frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + 1 \\ y_{n+1} & = & \frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 5 \end{array}\right. ,\ n \in \mathbb{N}$$

1. Montrer, par récurrence, que les points M_n de coordonnées $\left(x_n,\ y_n\right)$ sont sur la droite (Δ) dont une équation est $5x - y + 3 = 0$. En déduire que $x_{n+1} = 4x_n + 2$.

2. Montrer, par récurrence, que tous les x_n sont des entiers naturels. En déduire que tous les y_n sont aussi des entiers naturels.

3. Montrer que :

   1. x_n est divisible par 3 si et seulement si y_n est divisible par 3.

   2. Si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 3, alors ils sont premiers entre eux.

4. **1.** Montrer, par récurrence, que $x_n = \frac{1}{3}\left(4^n \times 5 - 2\right)$.

   2. En déduire que $4^n \times 5 - 2$ est un multiple de 3, pour tout entier naturel n.

123 Centres étrangers juin 2002

Retour au tableau

Soit p un nombre premier donné. On se propose d'étudier l'existence de couples $(x~;~y)$ d'entiers naturels strictement positifs vérifiant l'équation :

$$\mathbf{E}~: x^2 + y^2 = p^2$$

1. On pose $p = 2$. Montrer que l'équation **E** est sans solution.
On suppose désormais $p \geqslant 2$ et que le couple $(x~;~y)$ est solution de l'équation **E**.

2. Le but de cette question est de prouver que x et y sont premiers entre eux.

1. Montrer que x et y sont de parités différentes.
2. Montrer que x et y ne sont pas divisibles par p.
3. En déduire que x et y sont premiers entre eux.

3. On suppose maintenant que p est une somme de deux carrés non nuls, c'est-à-dire : $p = u^2 + v^2$ où u et v sont deux entiers naturels strictement positifs.

1. Vérifier qu'alors le couple $\left(\left|u^2 - v^2\right|~;~2uv\right)$ est solution de l'équation **E**.
2. Donner une solution de l'équation **E**, lorsque $p = 5$ puis lorsque $p = 13$.

4. On se propose enfin de vérifier sur deux exemples, que l'équation **E** est impossible lorsque p n'est pas somme de deux carrés.

1. $p = 3$ et $p = 7$ sont-ils somme de deux carrés ?
2. Démontrer que les équations $x^2 + y^2 = 9$ et $x^2 + y^2 = 49$ n'admettent pas de solution en entiers naturels strictement positifs.

124 Métropole juin 2002

Retour au tableau

1. On considère l'équation

$$(\mathrm{E})\ :\ 6x+7y=57$$

où x et y sont des entiers relatifs.

1. Déterminer un couple d'entiers relatifs $(u,\ v)$ tel que $6u+7v=1$; en déduire une solution particulière $(x_0,\ y_0)$ de l'équation (E).
2. Déterminer les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

2. Soit $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ un repère orthonormal de l'espace.
On considère le plan (P) d'équation : $6x+7y+8z=57$.
On considère les points du plan P qui appartiennent aussi au plan $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Montrer qu'un seul de ces points a pour coordonnées des entiers naturels ; déterminer les coordonnées de ce point.

3. On considère un point M du plan P dont les coordonnées $x,\ y$ et z sont des entiers naturels.

1. Montrer que l'entier y est impair.
2. On pose $y=2p+1$ où p est un entier naturel.
   Montrer que le reste dans la division euclidienne de $p+z$ par 3 est égal à 1.
3. On pose $p+z=3q+1$ où q est un entier naturel. Montrer que les entiers naturels $x,\ p$ et q vérifient la relation : $x+p+4q=7$. En déduire que q prend les valeurs 0 ou 1.
4. En déduire les coordonnées de tous les points de (P) dont les coordonnées sont des entiers naturels.

125 La Réunion juin 2002

Retour au tableau

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).
On fera une figure que l'on complétera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice.

1. Dans cette question on considère l'application s du plan dans lui-même, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = -\text{i}\overline{z}$.

1. Montrer que s est une réflexion d'axe noté D et de vecteur directeur $\vec{w}$ d'affixe $1 - \text{i}$.
2. Soit D$'$ la droite d'équation $y = -1$, on appelle s' la réflexion d'axe D$'$.
   Calculer une mesure de l'angle $\left(\vec{w}, \vec{u}\right)$.
   Déterminer géométriquement la composée $r = s' \circ s$.
3. Déterminer l'écriture complexe de r.

2. Dans cette question un considére l'application p du plan dans lui-même, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z_1 = \dfrac{1}{2}z - \dfrac{1}{2}\text{i}\overline{z} = \dfrac{z + z'}{2}$.

1. Soit le point A d'affixe $z = 2 + \text{i}$, déterminer l'affixe du point A_1 image de A par p.
2. Montrer que tout point M a son image M_1 située sur la droite d'équation $y = -x$.
3. Définir géométriquement, en utilisant les questions précédentes, l'application p.

3. On considère l'application f définie par $f = s' \circ p$.
Construire l'image A$'$ du point A par f.
Montrer que $s \circ p = p$ et en déduire que $f = r \circ p$. Montrer que, tout point M du plan a son image par f sur une droite Δ, que l'on déterminera.

126 Polynésie juin 2002

Retour au tableau

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que n et $2n+1$ sont premiers entre eux.

2. On pose $\alpha = n+3$ et $\beta = 2n+1$ et on note δ le PGCD de α et β.

  1. Calculer $2\alpha - \beta$ et en déduire les valeurs possibles de δ.

  2. Démontrer que α et β sont multiples de 5 si et seulement si $(n-2)$ est multiple de 5.

3. On considère les nombres a et b définis par :

$$\begin{array}{rcl} a & = & n^3+2n^2-3n \\ b & = & 2n^2-n-1 \end{array}$$

Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par $(n-1)$.

4. **1.** On note d le PGCD de $n(n+3)$ et de $(2n+1)$. Montrer que δ divise d, puis que $\delta = d$.

  2. En déduire le PGCD, Δ, de a et b en fonction de n.

  3. Application :
  Déterminer Δ pour $n = 2\,001$;
  Déterminer Δ pour $n = 2\,002$.

127 Pondichéry juin 2002

Retour au tableau

1. Calculer le P.G.C.D. de $4^5 - 1$ et de $4^6 - 1$.

Soit u la suite numérique définie par :
$u_0 = 0,\ u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n.$$

2. Calculer les termes $u_2,\ u_3$ et u_4 de la suite u.

3.
   1. Montrer que la suite u vérifie, pour tout entier naturel $n,\ u_{n+1} = 4u_n + 1$.
   2. Montrer que, pour tout entier naturel $n,\ u_n$ est un entier naturel.
   3. En déduire, pour tout entier naturel n, le P.G.C.D. de u_n et u_{n+1}.

4. Soit v la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n + \dfrac{1}{3}$.

   1. Montrer que v est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0.
   2. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
   3. Déterminer, pour tout entier naturel n, le P.G.C.D. de $4^{n+1} - 1$ et de $4^n - 1$.

128 Nouvelle–Calédonie décembre 2001

Retour au tableau

Partie I

Soit x un nombre réel.

1. Montrer que $x^4 + 4 = \left(x^2 + 2\right)^2 - 4x^2$.
2. En déduire que $x^4 + 4$ peut s'écrire comme produit de deux trinômes à coefficients réels.

Partie II

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère les entiers $A = n^2 - 2n + 2$ et $B = n^2 + 2n + 2$ et d leur PGCD.

1. Montrer que $n^4 + 4$ n'est pas premier.
2. Montrer que, tout diviseur de A qui divise n, divise 2.
3. Montrer que, tout diviseur commun de A et B, divise $4n$.
4. Dans cette question on suppose que n est impair.
   1. Montrer que A et B sont impairs. En déduire que d est impair.
   2. Montrer que d divise n.
   3. En déduire que d divise 2, puis que A et B sont premiers entre eux.
5. On suppose maintenant que n est pair.
   1. Montrer que 4 ne divise pas $n^2 - 2n + 2$.
   2. Montrer que d est de la forme $d = 2p$, où p est impair.
   3. Montrer que p divise n. En déduire que $d = 2$. (On pourra s'inspirer de la démonstration utilisée à la question **4.**)

129 Amérique du Sud décembre 2001

Retour au tableau

Soit n un entier naturel non nul.
On considère les nombres a et b tels que :

$$a = 2n^3 + 5n^2 + 4n + 1 \qquad \text{et} \qquad b = 2n^2 + n.$$

1. Montrer que $2n + 1$ divise a et b.

2. Un élève affirme que le PGCD de a et b est $2n + 1$.
Son affirmation est-elle vraie ou fausse ? (*La réponse sera justifiée.*)

130 Antilles–Guyane septembre 2001

Retour au tableau

1. Soient a et b des entiers naturels non nuls tels que PGCD$(a+b\ ;\ ab) = p$, où p est un nombre premier.

1. Démontrer que p divise a^2. (On remarquera que $a^2 = a(a+b) - ab$.)
2. En déduire que p divise a.
   On constate donc, de même, que p divise b.
3. Démontrer que PGCD$(a\ ;\ b) = p$.

2. On désigne par a et b des entiers naturels tels que $a \leqslant b$.

1. Résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{lcl}\text{PGCD}(a,\ b) & = & 5\\ \text{PPCM}(a,\ b) & = & 170\end{array}\right.$$

2. En déduire les solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\text{PGCD}(a+b,\ ab) & = & 5\\ \text{PPCM}(a,\ b) & = & 170\end{array}\right.$$

131 Métropole septembre 2001

Retour au tableau

1.

1. Déterminer le PGCD des nombres 168 et 20.
2. Soit l'équation $168x + 20y = 6$ dont les inconnues x et y sont des entiers relatifs. Cette équation a t-elle des solutions ?
3. Soit l'équation $168x + 20y = 4$ dont les inconnues x et y sont des entiers relatifs. Cette équation a t-elle des solutions ?

2.

1. Déterminer, en utilisant l'algorithme d'Euclide, et en détaillant les calculs effectués, deux entiers relatifs m et p tels que $42m + 5p = 1$.
2. En déduire deux entiers relatifs u et v tels que $42u + 5p = 12$.
3. Démontrer que le couple d'entiers relatifs $(x ; y)$ est solution de l'équation $42x + 5y = 2$ si, et seulement si $42(x + 4) = 5(34 - y)$.
4. Déterminer tous les couples d'entiers $(x ; y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation $42x + 5y = 2$.

3. Déduire du **2.** les couples $(x ; y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation $(42x + 5y - 3)(42x + 5y + 3) = 0$.

132 Polynésie septembre 2001

Retour au tableau

Dans le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{A}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$, unité graphique 1 cm, on considère les points B, D définis par : $\overrightarrow{\text{AB}} = 2\vec{u}$, $\overrightarrow{\text{AD}} = 3\vec{v}$ et C tel que ABCD soit un rectangle.
On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

1. Soit E l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{\text{DB}}$. Déterminer l'affixe z_{E} de E.

2. Déterminer les nombres réels a, b tels que le point F d'affixe $z_{\text{F}} = 6 - \text{i}$ soit le barycentre des points A, B, C affectés des coefficients a, b et 1.

3. On considère la similitude s qui transforme A en E et B en F. À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z', image de M par s.

1. Exprimer z' en fonction de z.
2. Déterminer le centre I, l'angle et le rapport de la similitude s.
3. Déterminer les images de C et de D par s.
4. Calculer l'aire de l'image par s du rectangle ABCD.

4.

1. Déterminer l'ensemble Ω des points M du plan tels que :

$$\left\|6\overrightarrow{M\text{A}} - 10\overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{C}}\right\| = 9.$$

2. Déterminer, en précisant ses éléments caractéristiques, l'image de Ω par s.

133 Amérique du Nord juin 2001

Retour au tableau

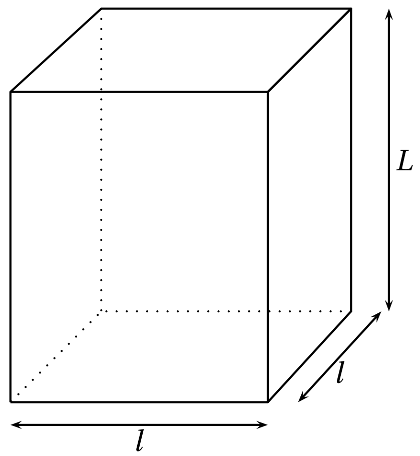
1. Montrer que, pour tout entier relatif n, les entiers $14n+3$ et $5n+1$ sont premiers entre eux.

2. On considère l'équation (E) : $87x+31y=2$ où x et y sont des entiers relatifs.

1. Vérifier, en utilisant par exemple la question **1** , que 87 et 31 sont premiers entre eux. En déduire un couple $(u\ ;\ v)$ d'entiers relatifs tel que $87u+31v=1$ puis une solution $(x_0\ ;\ y_0)$ de (E).
2. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{Z}^2$.
3. *Application* : Déterminer les points de la droite d'équation $87x-31y-2=0$ dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse est comprise entre 0 et 100. *Indication* : On remarquera que le point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ appartient à la droite (D) si, et seulement si, le couple $(x\ ;\ -y)$ vérifie l'équation (E).

134 Antilles–Guyane juin 2001

Retour au tableau



1. Soit B une boîte en forme de pavé droit de hauteur L, à base carrée de côté ℓ, où ℓ et L sont des entiers naturels non nuls tels que $\ell < L$. On veut remplir la boîte B avec des cubes tous identiques dont l'arête a est un entier naturel non nul (les cubes devant remplir complètement la boîte B sans laisser d'espace vide).

1. Dans cette question, $\ell = 882$ et $L = 945$. Quelle est la plus grande valeur possible pour a ? Quelles sont les valeurs possibles pour a ?
2. Dans cette question, le volume de la boîte B est $v = 77\,760$. On sait que, pour remplir la boîte B, la plus grande valeur possible de a est 12. Montrer qu'il y a exactement deux boîtes B possibles, dont on donnera les dimensions.

2. On veut remplir une caisse cubique C, dont l'arête c est un entier naturel non nul, avec des boîtes B toutes identiques telles que décrites dans la question **1** (Les boîtes B, empilées verticalement, doivent remplir complètement la caisse C sans laisser d'espace vide).

1. Dans cette question, $\ell = 882$ et $L = 945$. Quelle est la plus petite arête c pour la caisse C ? Quel est l'ensemble de toutes les valeurs possibles pour l'arête c ?
2. Dans cette question, le volume de la boîte B est 15 435. On sait que la plus petite arête possible pour la caisse C est 105. Quelles sont les dimensions ℓ et L de la boîte B ?

135 Asie juin 2001

Retour au tableau

On se place dans le plan, rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. On considère l'application f qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \left(\frac{1}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z}.$$

1. Exprimer $(f \circ f)(z)$ en fonction de z.
2. Montrer que $f = \text{R} \circ \text{S}$, où R est une rotation et S une symétrie axiale (on déterminera les éléments caractéristiques de ces deux applications R et S).
3. Décomposer R à l'aide de deux symétries axiales et en déduire que f est une réflexion, dont on donnera l'axe (D_1). Réaliser une figure, en y représentant l'axe (D_1) (unité graphique 2 cm).

2. On considère l'application g qui, à tout point M d'affixe z associe le point M'' d'affixe z'' telle que :

$$z'' = \left(\frac{1}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z} - \frac{1}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

1. Déterminer une équation de l'ensemble des points invariants de g.
2. Montrer que $g = \text{T} \circ f$ où T est une translation (on précisera l'affixe du vecteur de la translation T).
3. Décomposer la translation T à l'aide de deux symétries axiales et en déduire que g est une réflexion, d'axe noté (D_2).
4. Quelle est l'image par g du point A d'affixe $\frac{1}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$. En déduire une construction de la droite (D_2), qui n'utilise pas son équation, et l'illustrer en complétant la figure précédente.

136 Centres étrangers juin 2001

Retour au tableau

Un astronome a observé au jour J_0 le corps céleste A, qui apparaît périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard ($J_0 + 6$), il observe le corps B, dont la période d'apparition est de 81 jours. On appelle J_1 le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets aux yeux de l'astronome. Le but de cet exercice est de déterminer la date de ce jour J_1 .

1. Soient u et v le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre J_0 et J_1. Montrer que le couple $(u\ ;\ v)$ est solution de l'équation (E_1) : $35x - 27y = 2$.

2.

1. Déterminer un couple d'entiers relatifs $(x_0\ ;\ y_0)$ solution particulière de l'équation (E_2) :
$$35x - 27y = 1.$$
2. En déduire une solution particulière $(u_0\ ;\ v_0)$ de (E_1).
3. Déterminer toutes les solutions de l'équation (E_1).
4. Déterminer la solution $(u\ ;\ v)$ permettant de déterminer J_1.

3.

1. Combien de jours s'écouleront entre J_0 et J_1 ?
2. Le jour J_0 était le mardi 7 décembre 1999, quelle est la date exacte du jour J_1 ? (L'année 2000 était bissextile.)
3. Si l'astronome manque ce futur rendez-vous, combien de jours devrat-il attendre jusqu'à la prochaine conjonction des deux astres ?

137 Métropole juin 2001

Retour au tableau

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ [unité graphique : 6 cm].

On considère la transformation f du plan qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = z\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{6}}$ et on définit une suite de points (M_n) de la manière suivante :

M_0 a pour afflxe $z_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ et, pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = f(M_n)$.

On appelle z_n l'affixe de M_n.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.
Placer les points M_0, M_1, M_2.

2. Montrer que pour tout entier naturel n, on a l'égalité

$$z_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6}\right)}$$

(on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).

3. Soient deux entiers n et p tels que n soit supérieur ou égal à p. Montrer que deux points M_n et M_p sont confondus si, et seulement si, $(n - p)$ est multiple de 12.

4.
  1. On considère l'équation (E) : $12x - 5y = 3$ où x et y sont des entiers relatifs. Après avoir vérifié que le couple $(4 ; 9)$ est solution, résoudre l'équation (E).
  2. En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartienne à la demi-droite $[\mathrm{O}x)$.

138 Liban juin 2001

Retour au tableau

On suppose le plan rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, unité graphique 3 cm.

Partie A

Soit trois droites D_1, D_2 et D_3, sécantes en Ω et de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{d_1} = \vec{u}$, et $\overrightarrow{d_2}$ et $\overrightarrow{d_3}$ supposés unitaires et tels que $\left(\overrightarrow{d_1}, \overrightarrow{d_2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ et $\left(\overrightarrow{d_1}, \overrightarrow{d_3}\right) = -\dfrac{2\pi}{3}$.
On note S_1, S_2 et S_3 les réflexions d'axes respectifs D_1, D_2 et D_3, et f la composée $\text{S}_3 \circ \text{S}_2 \circ S_1$, de ces trois réflexions.

1. Tracer ces trois droites.

2.
  1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $r = \text{S}_2 \circ \text{S}_1$.
  2. Caractériser la réflexion S telle que $r = \text{S}_3 \circ \text{S}$. On notera D l'axe de S et on en déterminera un point et un vecteur directeur $\vec{d}$. Tracer la droite D.
  3. En déduire la nature de f et ses éléments caractéristiques.

3. Justifier que le point E d'affixe $z_{\text{E}} = \text{e}^{\frac{\text{i}\pi}{12}}$ est un point de la droite D.
Déterminer les nombres complexes a et b tels que la forme complexe de f soit l'application f_1 définie sur $\mathbb{C}$ par $f_1(z) = a\overline{z} + b$.

Partie B

1. Choisir un point A sur D. On note B l'image de A par S_1 et C l'image de B par S_2. Placer les points B et C.

2. Démontrer que A est l'image de C par S_3.

3. Que peut-on dire du point Ω pour le triangle ABC ?

139 Polynésie juin 2001

Retour au tableau

1. On considère x et y des entiers relatifs et l'équation (E) $\quad 91x + 10y = 1$.

   1. Énoncer un théorème permettant de justifier l'existence d'une solution à l'équation (E).

   2. Déterminer une solution particulière de (E) et en déduire une solution particulière de l'équation (E') : $91x + 10y = 412$.

   3. Résoudre (E').

2. Montrer que les nombres entiers $A_n = 3^{2n} - 1$, où n est un entier naturel non nul, sont divisibles par 8. (Une des méthodes possibles est un raisonnement par récurrence).

3. On considère l'équation (E$''$) $A_3x + A_2y = 3\,296$.

   1. Déterminer les couples d'entiers relatifs $(x,\ y)$ solutions de l'équation (E$''$).

   2. Montrer que (E$''$) admet pour solution un couple unique d'entiers naturels. Le déterminer.

140 Pondichéry juin 2001

Retour au tableau

1. On considère l'équation (1) d'inconnue $(n,\ m)$ élément de $\mathbb{Z}^2$:

$$11n - 24m = 1.$$

1. Justifier, à l'aide de l'énoncé d'un théorème, que cette équation admet au moins une solution.
2. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation (1).
3. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (1).

2. recherche du P.G.C.D. de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

1. Justifier que 9 divise $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.
2. $(n,\ m)$ désignant un couple quelconque d'entiers naturels solutions de (1), montrer que l'on peut écrire
$$\left(10^{11n} - 1\right) - 10\left(10^{24m} - 1\right) = 9.$$
3. Montrer que $10^{11} - 1$ divise $10^{11n} - 1$.
(on rappelle l'égalité $a^n - 1 = (a-1)\left(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a^0\right)$, valable pour tout entier naturel n non nul).
Déduire de la question précédente l'existence de deux entiers N et M tels que :
$$\left(10^{11} - 1\right) N - \left(10^{24} - 1\right) M = 9.$$
4. Montrer que tout diviseur commun à $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$ divise 9.
5. Déduire des questions précédentes le P.G.C.D. de $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$.

141 Nouvelle–Calédonie décembre 2000

Retour au tableau

Dans tout l'exercice x et y désignent des entiers naturels non nuls vérifiant $x < y$.
S est l'ensemble des couples $(x,\ y)$ tels que PGCD$(x,\ y) = y - x$.

1.
  1. Calculer le PGCD(363, 484).
  2. Le couple (363, 484) appartient-il à S ?

2. Soit n un entier naturel non nul ; le couple $(n,\ n+1)$ appartient-il à S ?
Justifier votre réponse.

3.
  1. Montrer que $(x,\ y)$ appartient à S si et seulement si il existe un entier naturel k non nul tel que $x = k(y - x)$ et $y = (k+1)(y - x)$.
  2. En déduire que pour tout couple $(x,\ y)$ de S on a :
     PPCM $(x,\ y) = k(k+1)(y - x)$.

4.
  1. Déterminer l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 228.
  2. En déduire l'ensemble des couples $(x,\ y)$ de S tels que PPCM $(x,\ y) = 228$.

142 Amérique du Sud novembre 2000

Retour au tableau

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ (unité graphique : 2cm). On désigne par m un nombre réel. On considère la transformation T_m du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = (m+\mathrm{i})z + m - 1 - \mathrm{i}$$

Partie A

1. Peut-on choisir m de telle sorte que T_m soit une translation ?
2. Déterminer le réel m de telle sorte que T_m soit une rotation. Préciser alors le centre et l'angle de cette rotation.

Partie B

Dans la suite de l'exercice on pose $m = 1$.

1.
   1. Calculer l'affixe du point Ω invariant par T_m.
   2. Pour tout nombre complexe z différent de 1, calculer $\dfrac{z'-1}{z-1}$. En interprétant géométriquement le module et un argument de $\dfrac{z'-1}{z-1}$, démontrer que T_1 est une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.
   3. Démontrer que, pour tout nombre z on a : $z' - z = \mathrm{i}(z-1)$. En déduire que si M est distinct de Ω , alors le triangle $\Omega MM'$ est rectangle isocèle en M.
2. On définit dans le plan une suite (M_n) de points en posant : $M_0 = \mathrm{O}$, $M_1 = \mathrm{T}_1(M_0)$, et pour tout entier naturel $M_n = \mathrm{T}_1(M_{n-1})$.
   1. Placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le plan muni du repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
   2. Pour tout entier naturel n, on pose $d_n = \Omega M_n$. Démontrer que la suite (d_n) est une suite géométrique.

      Converge-t-elle ?

143 Métropole septembre 2000

Retour au tableau

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. L'unité graphique est 4 cm.
On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives a, b, c et d telles que :

$$a = 1, \quad b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}, \quad c = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}, \quad d = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}.$$

1. **1.** Donner la forme exponentielle de c et la forme algébrique de d.

2. Représenter les points A, B, C et D.

3. Montrer que le quadrilatère OACB est un losange.

2. Montrer que les points D, A et C sont alignés.

3. Déterminer l'angle θ et le rapport k de la similitude directe s de centre O qui transforme A en C.

4. On note F et G les images par la similitude directe s des points D et C respectivement. Montrer que les points F, C et G sont alignés.

5. Déterminer l'affixe f du point F.

6. On considère la transformation φ qui à tout point M, d'affixe Z, associe le point M' d'affixe Z' telle que :

$$Z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\overline{Z} + \frac{3}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Pour toute droite δ du plan, on notera σ_δ la symétrie orthogonale d'axe δ.

1. Soit r la transformation qui à tout point M_1 d'affixe Z_1, associe le point M_1' d'affixe Z_1', telle que :

$$Z_1' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}Z_1 + \frac{3}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Déterminer la nature de r et donner ses éléments caractéristiques.

2. En utilisant les nombres complexes, donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{AO}}, \overrightarrow{\text{AB}}\right)$, puis déterminer la droite Δ telle que :

$$r = \sigma_\Delta \circ \sigma_{(\text{AO})}.$$

3. Montrer que $\varphi = r \circ \sigma_{(\text{AO})}$. En déduire la nature de φ.

144 Polynésie septembre 2000

Retour au tableau

Sur la figure ci-dessous, ABCD est un rectangle de sens direct, AEFB et ADGH sont des carrés de sens direct.

1. Le but de cette première question est de démontrer que les droites (AC), (EG) et (FH) sont concourantes. Pour cela on note I le point d'intersection des droites (EG) et (FH) et on introduit :

- l'homothétie h_1 de centre I qui transforme G en E.
- l'homothétie h_2 de centre I qui transforme F en H.

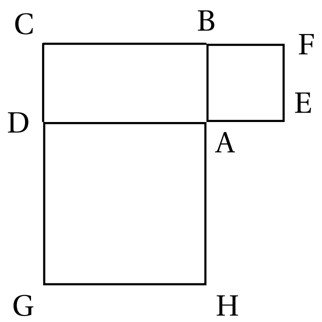
1. Déterminer l'image de la droite (CG) par l'homothétie h_1 puis par la composée $h_2 \circ h_1$.

2. Déterminer l'image de la droite (CG) par la composée $h_1 \circ h_2$.

3. Justifier l'égalité :

$$h_2 \circ h_1 = h_1 \circ h_2.$$

En déduire que la droite (AC) passe aussi par le point I.



2. On se propose ici de démontrer que la médiane issue du sommet A du triangle AEH est une hauteur du triangle ABD. On note O le milieu du segment [EH].

1. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{\text{AO}}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{\text{AE}}$ et $\overrightarrow{\text{AH}}$.

2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{\text{BD}}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AD}}$.

3. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\text{AO}}.\overrightarrow{\text{BD}}$ et conclure.

3. Dans cette question, on étudie la similitude directe S qui transforme A en B et D en A. On pose AB = 1 et AD = k $\quad(k > 0)$.

1. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude S.

2. Déterminer l'image de la droite (BD), puis l'image de la droite (AO), par cette similitude S.

3. En déduire que le point d'intersection Ω des droites (BD) et (AO) est le centre de la similitude S.

145 Amérique du Nord juin 2000

Retour au tableau

Dans le plan orienté, on considère un triangle direct OAB, rectangle et isocèle en O.
On a donc $\left(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OB}}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$. On note R_{A} et R_{B} les rotations de centres respectifs A et B et de même angle $\dfrac{\pi}{2}$ et S_{O} la symétrie de centre O.
On place un point C, non situé sur la droite (AB) , on trace les carrés BEDC et ACFG directs. On a donc $\left(\overrightarrow{\text{B}E}, \overrightarrow{\text{BC}}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $\left(\overrightarrow{\text{AC}}, \overrightarrow{\text{A}G}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

1. **1.** Déterminer $\text{S}_{(\text{AO})} \circ S_{(\text{AB})}$ composée des réflexions d'axes (AB) et (AO).

2. En écrivant R_{B} sous la forme d'une composée de deux réflexions, démontrer que $R_{\text{A}} \circ R_{\text{B}} = S_{\text{O}}$.

2. **1.** Déterminer l'image de E par $R_{\text{A}} \circ R_{\text{B}}$.

2. En déduire que O est le milieu du segment [EG].

3. On note R_F et R_D les rotations de centres respectifs F et D et de même angle. Étudier l'image de C par la transformation $R_F \circ S_{\text{O}} \circ R_D$. Déterminer la transformation $\text{R}_{\text{F}} \circ S_{\text{O}} \circ R_D$.

4. Placer H le symétrique de D par rapport à O. Démontrer que $R_F(H) = D$. Démontrer que le triangle $F\text{O}D$ est rectangle et isocèle en O.

146 Antilles–Guyane juin 2000

Retour au tableau

Les points $A_0 = \text{O}$; A_1 ; … ; A_{20} sont les sommets d'un polygone régulier de centre A, à 21 côtés, de sens direct.
Les points $B_0 = \text{O}$; B_1 ; B_{14} sont les sommets d'un polygone régulier de centre B, à 15 côtés, de sens direct.
Soit r_{A} la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{2\pi}{21}$ et r_{B} la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{2\pi}{15}$.
On définit la suite (M_n) de points par :

- M_0 est l'un des points $A_0,\ A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_{20}$;
- pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = r_{\text{A}}(M_n)$. On définit la suite (P_n) de points par :
- P_0 est l'un des points $B_0,\ B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_{14}$
- pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = r_{\text{B}}(P_n)$.

Le but de l'exercice est de déterminer, pour deux cas particuliers, l'ensemble S des entiers naturels n vérifiant :

$$M_n = P_n = \text{O}.$$

1. Dans cette question, $M_0 = P_0 = \text{O}$.

 1. Indiquer la position du point $M_{2\,000}$ et celle du point $P_{2\,000}$.

 2. Déterminer le plus petit entier naturel n non nul tel que $M_n = P_n = \text{O}$.
 En déduire l'ensemble S.

2. Dans cette question, $M_0 = A_{19}$ et $P_0 = B_{10}$. On considère l'équation $(E) : 7x - 5y = 1$ avec $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$.

 1. Déterminer une solution particulière $(a\ ;\ b)$ de (E).

 2. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

 3. En déduire l'ensemble S des entiers naturels n vérifiant $M_n = P_n = O$.

147 Asie juin 2000

Retour au tableau

1. Déterminer PGCD(2 688 ; 3 024).

2. Dans cette question, x et y sont deux entiers relatifs.

   1. Montrer que les équations (1) et (2) sont équivalentes (1) $2688x + 3024y = -3360$; (2) $8x + 9y = -10$.

   2. Vérifier que (1 ; − 2) est une solution particulière de l'équation (2).

   3. Déduire de ce qui précède les solutions de (2).

3. Soit $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ un repère orthonormal de l'espace. On considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives

$$x + 2y - z = -2 \quad \text{et} \quad 3x - y + 5z = 0.$$

   1. Montrer que (P) et (Q) se coupent suivant une droite (D).

   2. Montrer que les coordonnées des points de (D) vérifient l'équation (2).

   3. En déduire l'ensemble E des points de (D) dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

148 Centres étrangers juin 2000

Retour au tableau

Dans le plan orienté, on considère un losange ABCD tel que AB = BC = CD = DA = 5 et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.
On désigne par I, J, K, L et O les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD], [DA] et [BD].
On note (Δ) la médiatrice de [AB] et (Δ') la médiatrice de [CD].

1. Soit f l'isométrie du plan définie par $f(\mathrm{A}) = \mathrm{B}$, $f(\mathrm{B}) = \mathrm{D}$, $f(\mathrm{D}) = \mathrm{C}$.

   1. Prouver que f est un antidéplacement.

   2. Démontrer que s'il existe un point M invariant par f, alors M est équidistant des points A, B, C, D.

   3. L'isométrie f admet-elle un point invariant ?

2. Soit σ la symétrie orthogonale d'axe (Δ) et r la rotation de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$.

   1. Démontrer que $f = r \circ \sigma$.

   2. A-t-on $f = \sigma \circ r$?

3. Soit s_1, la symétrie orthogonale d'axe (BC).

   1. Déterminer l'axe de la symétrie orthogonale s_2, telle que $r = s_2 \circ s_1$.

   2. En déduire que f peut s'écrire sous la forme $f = s_1 \circ t_1$, , où t_1 est une translation que l'on précisera.

4. Soit t_2 la translation de vecteur $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$; on note t_2^{-1} sa réciproque et on pose $g = t_2^{-1} \circ f$.

   1. Déterminer $g(\mathrm{D})$, $g(\mathrm{I})$, $g(\mathrm{O})$. En déduire la nature précise de la transformation g.

   2. Démontrer que $f = t_2 \circ g$. A-t-on $f = g \circ t_2$?

149 Métropole juin 2000

Retour au tableau

Dans le plan orienté, on considère deux points A et B et le point E tel que $\overrightarrow{\text{AE}} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{\text{AB}}$.

Pour la figure, on prendra comme unité de longueur le centimètre et AB = 16. Cette figure sera complétée au fur et à mesure.

Soit un point C, distinct de A, tel que $\left(\overrightarrow{\text{AB}}\ ;\ \overrightarrow{\text{A}C}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

La droite parallèle à (BC) passant par E coupe la droite (AC) en F.

On appelle I le milieu de [BC], J le milieu de [EF] et D le point d'intersection des droites (EC) et (BF).

On note h_{A} l'homothétie de centre A qui transforme B en E et h_D l'homothétie de centre D qui transforme E en C.

1. Déterminer $h_{\text{A}}(C)$ puis $h_D(F)$.
2. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $h_D \circ h_{\text{A}}$ puis de $h_{\text{A}} \circ h_D$.
3. On appelle E' l'image de E par h_{A} et E'' l'image de E' par h_D. Représenter E', puis construire E'' en justifiant la construction.
4. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $h_D \circ h_{\text{A}} \circ h_{\text{A}} \circ h_D$.
5. Montrer que le quadrilatère BECE'' est un parallélogramme.
6. On appelle (Δ) l'ensemble des points M tels que $\left(\overrightarrow{\text{AB}}\ ;\ \overrightarrow{\text{A}M}\right) = \dfrac{\pi}{4}$. (Δ) est donc une demi-droite ouverte d'origine A.

   Pour la suite, les points A, B, E sont fixes et le point C décrit (Δ).

   Déterminer et construire le lieu géométrique $(\Delta)''$ du point E''.

150 La Réunion juin 2000

Retour au tableau

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, on considère les nombres

$$a = n^3 - n^2 - 12n \qquad \text{et} \qquad b = 2n^2 - 7n - 4.$$

1. Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par $n - 4$.

2. On pose $\alpha = 2n + 1$ et $\beta = n + 3$. On note d le PGCD de α et β.

   1. Établir une relation entre α et β indépendante de n.

   2. Démontrer que d est un diviseur de 5.

   3. Démontrer que les nombres α et β sont multiples de 5 si et seulement si $n - 2$ est multiple de 5.

3. Montrer que $2n + 1$ et n sont premiers entre eux.

4. **1.** Déterminer, suivant les valeurs de n et en fonction de n, le PGCD de a et b.

   2. Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers $n = 11$ et $n = 12$.

151 Liban juin 2000

Retour au tableau

1. Le plan $(\mathscr{P})$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.

Soit A et B dans ce plan d'affixes respectives $a = 1 + \text{i}$; $b = -4 - \text{i}$. Soit f la transformation du plan $(\mathscr{P})$ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $\overrightarrow{\text{O}M'} = 2\overrightarrow{\text{A}M} + \overrightarrow{\text{B}M}$.

1. Exprimer z' en fonction de z.
2. Montrer que f admet un seul point invariant Ω dont on donnera l'affixe. En déduire que f est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

2. On se place dans le cas où les coordonnées x et y de M sont des entiers naturels avec $1 \leqslant x \leqslant 8$ et $1 \leqslant y \leqslant 8$. Les coordonnées $(x'\ ;\ y')$ de M' sont alors : $x' = 3x + 2$ et $y' = 3y - 1$.

1. On appelle G et H les ensembles des valeurs prises respectivement par x' et y'. Écrire la liste des éléments de G et H.
2. Montrer que $x' - y'$ est un multiple de 3.
3. Montrer que la somme et la différence de deux entiers quelconques ont même parité. On se propose de déterminer tous les couples $(x'\ ;\ y')$ de $G \times H$ tels que $m = x'^2 - y'^2$ soit un multiple non nul de 60.
4. Montrer que dans ces conditions, le nombre $x' - y'$ est un multiple de 6. Le nombre $x' - y'$ peut-il être un multiple de 30 ?
5. En déduire que, si $x'^2 - y'^2$ est un multiple non nul de 60, $x' + y'$ est multiple de 10 et utiliser cette condition pour trouver tous les couples $(x'\ ;\ y')$ qui conviennent. En déduire les couples $(x\ ;\ y)$ correspondant aux couples $(x'\ ;\ y')$ trouvés.

152 Polynésie juin 2000

Retour au tableau

1. On cherche deux entiers relatifs x et y solutions de l'équation (1) $ax + by = 60$ (a et b entiers naturels donnés tels que $ab \neq 0$). On notera d le plus grand commun diviseur de a et b.

   1. On suppose que l'équation (1) a au moins une solution $(x_0 ; y_0)$. Montrer que d divise 60.

   2. On suppose que d divise 60. Prouver qu'il existe alors au moins une solution $(x_0 ; y_0)$ à l'équation (1).

2. On considère l'équation : (2) $24x + 36y = 60$. (x et y entiers relatifs).

   1. Donner le PGCD de 24 et 36 en justifiant brièvement. Simplifier l'équation (2).

   2. Trouver une solution évidente pour l'équation (2) et résoudre cette équation. On appellera S l'ensemble des couples $(x ; y)$ solutions.

   3. Énumérer tous les couples $(x ; y)$ solutions de (2) et tels que :

$$-10 \leqslant x \leqslant 10.$$

   Donner parmi eux, ceux pour lesquels x et y sont multiples de 5.

   4. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique : 1 cm), représenter l'ensemble E des points M de coordonnées $(x ; y)$ telles que :

$$\begin{cases} x &= 1+3t \\ y &= 1-2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

   5. Montrer que les points ayant pour coordonnées les solutions $(x ; y)$ de l'équation (2) appartiennent à E. Comment peut-on caractériser S ?

153 Pondichéry juin 2000

Retour au tableau

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1.

1. Pour $1 \leqslant n \leqslant 6$, calculer les restes de la division euclidienne de 3^n par 7.
2. Démontrer que, pour tout n, $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7.
   En déduire que 3^n et 3^{n+6} ont le même reste dans la division par 7.
3. À l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de $3^{1\,000}$ par 7.
4. De manière générale, comment peut-on calculer le reste de la division euclidienne de 3^n par 7, pour n quelconque ?
5. En déduire que, pour tout entier naturel $n, 3^n$ est premier avec 7.

2. Soit $U_n = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{i=n-1} 3^i$, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que si U_n est divisible par 7, alors $3^n - 1$ est divisible par 7.
2. Réciproquement, montrer que si $3^n - 1$ est divisible par 7, alors U_n est divisible par 7. En déduire les valeurs de n telles que U_n soit divisible par 7.

154 Nouvelle–Calédonie décembre 1999

Retour au tableau

Soit n un entier naturel non nul, on considère les entiers suivants : $N = 9n + 1$ et $M = 9n - 1$.

1. On suppose que n est un entier pair. On pose $n = 2p$, avec p entier naturel non nul.

   1. Montrer que M et N sont des entiers impairs.

   2. En remarquant que $N = M + 2$, déterminer le PGCD de M et N.

2. On suppose que n est un entier impair. On pose $n = 2p + 1$, avec p entier naturel.

   1. Montrer que M et N sont des entiers pairs.

   2. En remarquant que $N = M + 2$, déterminer le PGCD de M et N.

3. Pour tout entier naturel non nul n, on considère l'entier $81n^2 - 1$.

   1. Exprimer l'entier $81n^2 - 1$ en fonction des entiers M et N.

   2. Démontrer que si n est pair alors $81n - 1$ est impair.

   3. Démontrer que $81n^2 - 1$ est divisible par 4 si et seulement si n est impair.

155 Amérique du Sud novembre 1999

Retour au tableau

On considère l'équation

$$(1) \qquad : \quad 20b - 9c = 2.$$

où les inconnues b et c appartiennent à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers relatifs.

1. **1.** Montrer que si le couple $(b_0\ ;\ c_0$ d'entiers relatifs est une solution de l'équation (1), alors c_0 est un multiple de 2.

2. On désigne par d le p.g.c.d. de $|b_0|$ et $|c_0|$. Quelles sont les valeurs possibles de d ?

2. Déterminer une solution particulière de l'équation (1), puis déterminer l'ensemble des solutions de cette équation.

3. Déterminer l'ensemble des solutions $(b\ ;\ c)$ de (1) telles que p.g.c.d.$(b\ ;\ c) = 2$.

4. Soit r un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2.
Le nombre entier naturel P, déterminé par $P = \alpha_n r^n + \alpha_{n-1} r^{n-1} + \ldots + \alpha_1 r + \alpha_0$, où α_n, α_{n-1}, ..., α_1, α_0 sont des nombres entiers naturels vérifiant $0 < \alpha_n < r$, $0 \leqslant \alpha_{n-1} < r, \ldots,$ $0 \leqslant,$ $\alpha_0 < r$ est noté $\overline{\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_1\alpha_0}^{(r)}$; cette écriture est dite « écriture de P en base r ». Soit P un nombre entier naturel s'écrivant $\overline{ca5}^{(6)}$ et $\overline{bbaa}^{(4)}$ (en base sixet en base quatre respectivement).
Montrer que $a + 5$ est un multiple de 4 et en déduire les valeurs de a, puis de b et de c.
Donner l'écriture de P dans le système décimal.

156 Antilles–Guyane septembre 1999

Retour au tableau

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
On donne le point A(6 ; 0) et le point A′(0 ; 2).
À tout point M de l'axe des abscisses différent de A on associe le point M' tel que :

$$\text{A}M = \text{A}'M' \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{\text{A}M},\ \overrightarrow{\text{A}'M'}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{mod } 2\pi.$$

On admet l'existence et l'unicité de M'.
On réalisera une figure avec, pour unité graphique 0,5 cm et pour cette figure, on prendra −4 pour abscisse de M.

1. Soit M un point de l'axe des abscisses différent de A.

  1. Placer le point M' sur la figure.

  2. Pour cette question on pourra donner une démonstration purement géométrique ou utiliser les nombres complexes. Démontrer qu'il existe une unique rotation, dont on précisera le centre, noté I et l'angle, qui transforme A en A′ et M en M'.
  Placer I sur la figure.

  3. Démontrer que la médiatrice de $[MM']$ passe par I.

2. On veut déterminer et construire les couples de points $(M,\ M')$ vérifiant la condition supplémentaire $MM' = 20$.

  1. Calculer IM et démontrer qu'il existe deux couples solutions : $(M_1,\ M'_1)$ et $(M_2,\ M'_2)$.

  2. Placer ces quatre points sur la figure.

157 Métropole septembre 1999

Retour au tableau

Soit le repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ du plan complexe. Les points A, B et C sont définis par leurs affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = 3 - \text{i}\sqrt{3}\ ;\ z_{\text{B}} = 3 + \text{i}\sqrt{3}\ ;\ z_{\text{C}} = 2 + \sqrt{3} + 3\text{i}.$$

1. Faire la figure en choisissant pour unité graphique 2 cm. (On placera l'origine sur la gauche de la feuille).

2. Prouver que OAB est un triangle équilatéral direct. Soit G le centre de gravité du triangle OAB. Déterminer l'affixe z_{G} de G. Dans la suite de l'exercice, on étudie deux isométries transformant [OA] en [GC].

3. Soit a et b deux nombres complexes et R l'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = az + b$.

1. Déterminer a et b pour que R(O) = G et R(A) = C.
2. Prouver que R est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle.
3. Prouver que les droites (OA) et (GC) sont perpendiculaires. Que peut-on dire des points G, B et C ?
4. Construire, en justifiant la construction, l'image du triangle OAB par R.

4. Soit a' et b' deux nombres complexes et f l'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = a'\overline{z} + b'$.

1. Déterminer a' et b' pour que $f(\text{O}) = \text{G}$ et $f(\text{A}) = \text{C}$.
2. Soit I le milieu du segment [OG]. Déterminer le point $f(\text{I})$. f est-elle une réflexion ?
3. Construire en justifiant la construction, l'image du triangle OAB par f.

158 Sportifs de haut–niveau septembre 1999

Retour au tableau

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. (unité graphique : 1 cm) .

1. On note A, B et C les points d'affixes respectives 2i, -1 + 4i et 5 + 2i.
On considère la translation t de vecteur $\overrightarrow{\text{BC}}$, la symétrie S d'axe (AB) et la transformation $f = t \circ \text{S}$.
On désigne par A′ et B′ les images respectives de A et B par f.
Calculer les affixes de A′ et B′ et placer les points A, B, C, A′ et B′ sur une figure.

2. On rappelle que l'écriture complexe d'un antidéplacement est de la forme $z' = a\overline{z} + b$ où a et b sont deux nombres complexes et $|a| = 1$.
À tout point M d'affixe z, f associe le point M' d'affixe z'.
Justifier que f est un antidéplacement et démontrer que :

$$z' = \frac{-3-4\text{i}}{5}\overline{z} + \frac{38-6\text{i}}{5}.$$

3. Déterminer l'ensemble des points invariants par f. La transformation f est-elle une symétrie ?

4. On appelle D le point d'affixe 3 + 6i, Δ la médiatrice de [BD] et S′ la symétrie d'axe Δ.

1. Montrer que les droites Δ et (AB) sont parallèles.
Déterminer $\text{S} \circ \text{S}'$.
2. Montrer que $f \circ \text{S}'$ est la translation, notée t', de vecteur $\overrightarrow{\text{DC}}$. En déduire que $f = t' \circ \text{S}'$.

159 Amérique du Nord juin 1999

Retour au tableau

Les trois parties I, II, III peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Partie I

Soit $E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10\}$.
Déterminer les paires $\{a ; b\}$ d'entiers distincts de E tels que le reste de la division euclidienne de ab par 11 soit 1.

Partie II

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
2. L'entier $(n-1)!+1$ est-il pair ?
3. L'entier $(n-1)!+1$ est-il divisible par un entier naturel pair ?
4. Prouver que l'entier $(15-1)!+1$ n'est pas divisible par 15.
5. L'entier $(11-1)!+1$ est-il divisible par 11 ?

Partie III

Soit p un entier naturel non premier ($p \geqslant 2$).

1. Prouver que p admet un diviseur q ($1 < q < p$) qui divise $(p-1)$.
2. L'entier q divise-t-il l'entier $(p-1)!+1$?
3. L'entier p divise-t-il l'entier $(p-1)!+1$?

160 Antilles–Guyane juin 1999

Retour au tableau

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, on donne le point A$(12\ ;\ 18)$. On désigne par B un point de l'axe $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath}\right)$ et par C un point de l'axe $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\jmath}\right)$ tels que $\left(\overrightarrow{\text{A}B},\ \overrightarrow{\text{A}C}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.
On appelle x l'abscisse de B et y l'ordonnée de C.

1. Démontrer que le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de l'équation :

$$\text{(E)}\quad 2x + 3y = 78.$$

2. On se propose de trouver tous les couples $(B,\ C)$ de points ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs.

 1. Montrer que l'on est ramené à l'équation (E), avec x et y appartenant à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers relatifs.

 2. À partir de la définition de B et C, trouver une solution particulière $(x_0\ ;\ y_0)$ de (E) avec x_0 et y_0 appartenant à $\mathbb{Z}$.

 3. Démontrer qu'un couple $(x\ ;\ y)$ d'entiers relatifs est solution de l'équation (E) si, et seulement si, il est de la forme $(12 + 3k\ ;\ 18 - 2k)$, où k appartient à $\mathbb{Z}$.

 4. Combien y a-t-il de couples de points $(B,\ C)$ ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs, tels que :

$$-6 \leqslant x \leqslant 21 \text{ et } -5 \leqslant y \leqslant 14\ ?$$

161 Asie juin 1999

Retour au tableau

1. On considère l'équation $(E)\ :\ 8x+5y=1$, où $(x\ ;\ y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.

   1. Donner une solution particulière de l'équation (E).

   2. Résoudre l'équation (E).

2. Soit N un nombre naturel tel qu'il existe un couple $(a\,;\ b)$ de nombres entiers vérifiant : $\left\{\begin{array}{l c l} N & = & 8a+1\\ N & = & 5b+2.\end{array}\right.$

   1. Montrer que le couple $(a\ ;\ b)$ est solution de (E).

   2. Quel est le reste, dans la division de N par 40 ?

3.
   1. Résoudre l'équation $8x+5y=100$, où $(x\ ;\ y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.

   2. Au VIII$^{\text{e}}$ siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

162 Centres étrangers juin 1999

Retour au tableau

Le but de cet exercice est d'utiliser les solutions d'une équation à deux inconnues entières pour résoudre un problème dans l'espace.

1. **1.** Déterminer un couple $(x_0 ; y_0)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation :

$$48x + 35y = 1.$$

(On pourra utiliser l'algorithme d'Euclide pour la recherche du PGCD de deux nombres).

2. Déduire de **a.** tous les couples d'entiers relatifs $(x ; y)$ solutions de cette équation.

2. L'espace étant rapporté à un repèreorthonormal, on donne le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(48 ; 35 ; 24)$ et le point A de coordonnées $(-11 ; 35 ; -13)$.

1. Préciser la nature et donner une équation cartésienne de l' ensemble (Π) des points M de l'espace, de coordonnées $(x ; y ; z)$ tels que $\vec{u}.\overrightarrow{\text{AM}} = 0$.

2. Soit (D) la droite intersection de (Π) avec le plan d'équation $z = 16$.
Déterminer tous les points de (D) dont les coordonnées sont entières et appartiennent à l'intervalle [- 100 ; 100].
En déduire les coordonnées du point de (D), à coordonnées entières, situé le plus près de l'origine.

163 Métropole juin 1999

Retour au tableau

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les nombres

$$a_n = 4 \times 10^n - 1,\ b_n = 2 \times 10^n - 1 \text{ et} c_n = 2 \times 10^n + 1.$$

1.
1. Calculer $a_1,\ b_1,\ c_1,\ a_2,\ b_2,\ c_2,\ a_3,\ b_3$ et c_3.
2. Combien les écritures décimales des nombres a_n et c_n ont-elles de chiffres ? Montrer que a_n et c_n sont divisibles par 3.
3. Montrer, en utilisant la liste des nombres premiers inférieurs à 100 donnée ci-dessous, que b_3 est premier.
4. Montrer que, pour tout entier naturel non nul $n,\ b_n \times c_n = a_{2n}$.
   En déduire la décomposition en produit de facteurs premiers de a_6.
5. Montrer que PGCD $(b_n,\ c_n)$ = PGCD $(c_n,\ 2)$.
   En déduire que b_n et c_n sont premiers entre eux.

2. On considère l'équation :

$$(1) \qquad b_3 x + c_3 y = 1$$

d'inconnues les entiers relatifs x et y.

1. Justifier le fait que (1) possède au moins une solution.
2. Appliquer l'algorithme d'Euclide aux nombres c_3 et b_3 ; en déduire une solution particulière de (1).
3. Résoudre l'équation (1).

Liste des nombres premiers inférieurs à 100 : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97.

164 Liban juin 1999

Retour au tableau

Le nombre n est un entier naturel non nul. On pose : $a = 4n + 3$, $b = 5n + 2$ et on note d le PGCD de a et b.

1. Donner la valeur de d dans les trois cas suivants : $n = 1$, $n = 11$, $n = 15$.

2. Calculer $5a - 4b$ et en déduire les valeurs possibles de d.

3.
  1. Déterminer les entiers naturels n et k tels que $4n + 3 = 7k$.

  2. Déterminer les entiers naturels n et k tels que $5n + 2 = 7k$.

4. Soit r le reste de la division euclidienne de n par 7.
Déduire des questions précédentes la valeur de r pour laquelle d vaut 7.
Pour quelles valeurs de r, d est-il égal à 1 ?

165 Pondichéry juin 1999

Retour au tableau

Partie A

On admet que 1999 est un nombre premier. Déterminer l'ensemble des couples $(a\,;\ b)$ d'entiers naturels admettant pour somme 11 994 et pour PGCD 1 999.

Partie B

On considère l'équation (E) d'inconnue n appartenant à $\mathbb{N}$:

$$(E) : n^2 - Sn + 11\,994 = 0 \text{ où } S \text{ est un entier naturel.}$$

On s'intéresse à des valeurs de S telles que (E) admette deux solutions dans $\mathbb{N}$.

1. Peut-on déterminer un entier S tel que 3 soit solution de (E) ?
   Si oui, préciser la deuxième solution.
2. Peut-on déterminer un entier S tel que 5 soit solution de (E) ?
3. Montrer que tout entier n solution de (E) est un diviseur de 11 994.
   En déduire toutes les valeurs possibles de S telles que (E) admette deux solutions entières.

Partie C

Comment montrerait-on que 1999 est un nombre premier ?
Préciser le raisonnement employé.
La liste de tous les entiers premiers inférieurs à 100 est précisée ci-dessous :
2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97.

166 Antilles–Guyane septembre 1998

Retour au tableau

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On placera sur une même figure, qui sera complétée au fur et à mesure les points introduits dans le texte (unité graphique : 2 cm.)

1.

1. Résoudre l'équation (E) : $z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0$.
2. On considère les nombres complexes $z_1 = \sqrt{3} + \text{i}$ et $z_2 = \sqrt{3} - \text{i}$ et on désigne par M et N les points d'affixes respectives z_1 et z_2. Déterminer le module et l'argument de z_1 et de z_2 ; placer M et N sur la figure.
3. Déterminer les affixes des points Q et P images respectives de M et N par la translation de vecteur $\vec{w} = -2\vec{u}$. Placer P et Q sur la figure.
   Montrer que MNPQ est un carré.

2. Soit R le symétrique de P par rapport à O, E l'image de P par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, S l'image de E par l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{3}$.
Placer ces points sur la figure.
Calculer les affixes de R et de S. Montrer que S appartient au segment [MN].

3. On pose $\alpha = 2 - \sqrt{3}$.

1. Montrer que $1 + \alpha^2 = 4\alpha$ et $1 - \alpha^2 = 2\alpha\sqrt{3}$.
2. Exprimer les affixes Z de $\overrightarrow{\text{PR}}$ et Z' de $\overrightarrow{\text{PS}}$ en fonction de α.
3. Montrer que $|Z| = |Z'|$ et $\dfrac{Z}{Z'} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$.
4. Déduire des questions précédentes la nature du triangle PRS.