##النهايات والإتصال - الدالة العكسية##

1 تحديد النهايات: لتحد يد $\lim\limits_{x \to X_0} f(x)$ حيث x_0 عنصر من $\mathbb{R}$ أو $x_0 = \pm\infty$ نرتكز على الجدولين التاليين:

شكل النهاية	$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$-\infty+\infty$	$0\times\infty$	$\frac{0}{l}$ $l\neq 0$	$\frac{\infty}{0}$	$\frac{0}{\infty}$	$l\in\mathbb{R}$	$\frac{l}{\infty}$	$\frac{\infty}{l}$	$\infty\times\infty$	$\frac{l}{0^+}$		$\frac{l}{0^-}$	
												$l<0$	$l>0$	$l<0$	$l>0$
نتيجتها $\lim\limits_{x \to X_0} f(x)$	أشكال غير محددة لا يمكن حساب النهاية مباشرة. يجب التفكير في: - نهايات اعتيادية. -التعميل ثم الاختزال. -استعمال المرافق. -تقنيات أخرى كالتاطير مثلا.				**0**	$\pm\infty$	**0**	l	**0**	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

العمليات على النهايات:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**0**	**0**	$l<0$	$l>0$	$l<0$	$l>0$	**0**	$l<0$	$l>0$	$l<0$	$l>0$	l
$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	$g<0$	$g>0$	$g<0$	$g>0$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**0**	**0** $g<0$	**0** $g<0$	**0** $g>0$	**0** $g>0$	$l'\neq 0$
$\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x)$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**?**	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**0**	l	l	l	l	$l+l'$
$\lim\limits_{x \to x_0} (f\times g)(x)$	**?**	**?**	**?**	**?**	$-\infty$	$+\infty$	**?**	**?**	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	$l\times l'$
$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**?**	**?**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**?**	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{l}{l'}$

نتائج:

$$\lim_{x\to\infty}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots a_1 x^1 + a_0) = \lim_{x\to\infty}(a_n x^n) = \begin{cases} +\infty, a_n > 0 : n.pair \\ -\infty, a_n < 0 : n.pair \\ -\infty, a_n > 0 : n.impair \\ +\infty, a_n < 0 : n.impair \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots b_0}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_n x^n}{b_m x^m}\right) = \begin{cases} 0, n < m \\ \pm\infty, n > m \\ \frac{a_n}{b_m}, n = m \end{cases}$$

1) يمكن أن تكون دا لة f معرفة في نقطة x_0 بدون أن تقبل نهاية في النقطة x_0 مثلا: $f(x) = \sqrt{x^2(x-1)}$ معرفة في0 وليست لها نهاية في الصفر.

2) يمكن أن تكون دا لة f غيرمعرفة في نقطة x_0 و تقبل نهاية في النقطة x_0 مثلا: $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ غير معرفة في1

لكن $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$

3) لكي تقبل دالة f نهاية في نقطة x_0 يجب أن تكون معرفة بجوار x_0.

4) يمنع منعا كليا تفكيك نهايتين الا بشروط. مثلا:

إذا إعتبرنا الدالتين f و g المعرفتين ب: $f(x) = \sin(x)$ و $g(x) = \frac{1}{x} - \sin(x)$.

f و g ليست لهما نهاية بجوار $\pm\infty$ لكن: $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)+g(x))=0$

نهايات اعتيادية لدوال مثلثية:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{ax}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan(ax)}{ax}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(ax)}{(ax)^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} tan(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} tan(x)=-\infty$$

2 الإتصال:

تعريف1:

لكي تكون دالة f متصلة في نقطة x_0 يجب أن يتحقق ما يلي:

شرط1: f معرفة في x_0.

شرط2: $\lim_{x\to x_0} f(x)\in\mathbb{R}$.

شرط3: $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

تعريف2:

**) f دالة متصلة على اليمين في x_0 $\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$

**) f دالة متصلة على اليسار في x_0 $\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$

خاصية:

تكون f متصلة في x_0 اذا وفقط اذا كانت متصلة على اليمين وعلى اليسار في x_0

العمليات على الدوال المتصلة:

الاتصال على مجال:

**تكون دالة f متصلة على مجال $[a,b]$ اذا وفقط اذا كانت:

--متصلة على المجال المفتوح $]a,b[$.

--متصلة على يمين a.

-- متصلة على يسار b.

**اذا كانت: f دالة متصلة في x_0 و g دالة متصلة في x_0 فان

$f+g$ و $f\times g$ و $\alpha\times f$ و $|f|$ دوال متصلة في x_0.

و $\frac{f}{g}$ دالة متصلة في x_0 مع($g(x_0)\neq 0$.

الدوال المتصلة الاعتيادية:

*كل دالة حدودية متصلة على $\mathbb{R}$.

*كل دالة جذرية متصلة على حيز تعريفها.

*الدوال المثلثية sin و cos متصلتان على $\mathbb{R}$.

*الدالة المثلثية Tangente متصلة على $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

التمديد بالاتصال

* f دالة عددية تقبل تمديدا بالاتصال في نقطة x_0 اذا كان:

$\boxed{x_0\notin D_f}$ و $\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)=l\in\mathbb{R}}$

* التمديد بالاتصال للدالة f في النقطة x_0 هي الدالة g المعرفة بمايلي:

$$\boxed{g(x)=\begin{cases} f(x);x\in D_f\\ l;x=x_0\end{cases}}$$

3 النهايات والترتيب:

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح و يحتوي على عنصر x_0.

$$1)\ \begin{cases}|f(x)-l|\le u(x)\\ \lim_{x\to x_0}u(x)=0\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to x_0}f(x)=l$$

$$2)\ \begin{cases}u(x)\le f(x)\le v(x)\\ \lim_{x\to x_0}u(x)=\lim_{x\to x_0}v(x)=l\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to x_0}f(x)=l$$

$$3)\ \begin{cases}u(x)\le f(x)\\ \lim_{x\to x_0}u(x)=+\infty\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to x_0}f(x)=+\infty$$

$$4)\ \begin{cases}f(x)\le v(x)\\ \lim_{x\to x_0}v(x)=-\infty\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to x_0}f(x)=-\infty$$

4 نهاية واتصال مركبة دالتين:

*** لتكن f دالة معرفة على مجال I وg دالة معرفة على مجال J بحيث:** $\boxed{f(I)\subset J}$

اذا كانت f متصلة على I و g متصلة على J فان: المركبة gof دالة متصلة على المجال I .

*** لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح I منقط مركزه a وg دالة معرفة على مجال J بحيث:** $\boxed{f(I)\subset J}$

اذا كانت $\lim_{x\to x_0}f(x)=l$ وg متصلة في النهاية l فان: المركبة gof تقبل النهاية $g(l)$ في $x_0=a$

5 صورة مجال بدالة متصلة:

1) صورة مجال مغلق $[a,b]$:

اذا كانت f دالة متصلة على مجال $[a,b]$ فان صورة $[a,b]$ بالدالة f هو مجال $[m,M]$

بحيث: $\boxed{m=\inf[f(x)];x\in[a,b]}$ **و** $\boxed{M=\sup[f(x)];x\in[a,b]}$

$$\boxed{f \text{ دالة متصلة على المجال } [a,b] \Leftrightarrow f([a,b])=[m,M]}$$

2) مبرهنة القيم الوسيطية:

-- اذا كانت f دالة متصلة على مجال $[a,b]$ فان لكل عدد β محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الاقل عدد α من المجال $[a,b]$ بحيث يكون $f(\alpha)=\beta$.

حالة خاصة:

-- اذا كانت f دالة متصلة على مجال $[a,b]$ وكان $\boxed{f(a).f(b)<0}$

فان المعادلة $\boxed{f(x)=0}$ **تقبل حلا على الاقل في المجال $[a,b]$.**

ملاحظة : اذا كانت f رتيبة قطعا وتحقق معطيات الخاصية فان المعادلة تقبل حلا وحيدا في المجال $[a,b]$.

3) صورة مجال I بدالة متصلة:

a) إذا كانت الدالة f تزايدية قطعا على I :

$\boxed{f([a,b])=[f(a),f(b)]}$ $\boxed{f([a,b[)=\left[f(a),\lim_{x\to b^-}f(x)\right[}$

$\boxed{f(]a,b])=\left]\lim_{x\to a^+}f(x),f(b)\right]}$ $\boxed{f(]a,b[)=\left]\lim_{x\to a^+}f(x),\lim_{x\to b^-}f(x)\right[}$

$\boxed{f(]-\infty,+\infty[)=\left]\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right[}$ $\boxed{f([a,+\infty[)=\left[f(a),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right[}$ $\boxed{f(]-\infty,a[)=\left]\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to a^-}f(x)\right[}$

b) **إذا كانت الدالة f تناقصية قطعا علىI :**

$f([a,b]) = [f(b), f(a)]$ | $f([a,b[) = \left]\lim\limits_{x \to b^-} f(x), f(a)\right]$

$f(]a,b]) = \left[f(b), \lim\limits_{x \to a^+} f(x)\right[$ | $f(]a,b[) = \left]\lim\limits_{x \to b^-} f(x), \lim\limits_{x \to a^+} f(x)\right[$

$f(]-\infty,+\infty[) = \left]\lim\limits_{x \to +\infty} f(x), \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)\right[$ | $f([a,+\infty[) = \left]\lim\limits_{x \to +\infty} f(x), f(a)\right]$ | $f(]-\infty,a[) = \left]\lim\limits_{x \to a^-} f(x), \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)\right[$

6 **الدالة العكسية لدالة متصلة و رتيبة قطعا:**

مبرهنة: **ا ذا كانت f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال I فان f تقابل من المجال I نحو المجال J = f(I).**

-- كل دالة f متصلة ورتيبة قطعا على مجال I تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة منJ نحو I . f^{-1} بدورها متصلة ورتيبة قطعا على(f(I.

-- f وf^{-1} لهما نفس منحى التغيرات.

منحنى الدالة f ومنحنىالدالةf^{-1} متماثلا ن بالنسبة للممنصف الاول للمعلم

$$\begin{array}{l} (\forall x \in I) : f^{-1} o f(x) = x \\ (\forall y \in f(I)) : f o f^{-1}(y) = y \end{array}$$

تطبيقات:

1) **دالة الجذر من الرتبة** $n : n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ **.**

الدالة *المعرفة ب* $f : x \mapsto x^n$ متصلة وتزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$

الدالة *f* تقبل دالة عكسية *f^{-1}* معرفة من $\mathbb{R}^+$ نحو $\mathbb{R}^+$ بما يلي:

$$\begin{array}{l} f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \sqrt[n]{x} \end{array}$$

الدالة *f^{-1}* أو $\sqrt[n]{\ }$ تسمى دالة الجذر من الرتبة n.

2)خاصيات و نتائج:

1) $\left.\begin{array}{l} y = \sqrt[n]{x} \\ (x,y) \in \mathbb{R}^{+2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = y^n \\ (x,y) \in \mathbb{R}^{+2} \end{array}\right.$

2) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{+2} \left\{\begin{array}{l} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y \\ \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x < y \end{array}\right.$

3) ليكن x و y من $\mathbb{R}^+$ ، لد ينا النتائج التالية:

$(\sqrt[n]{x})^n = x$ | $(\sqrt[n]{x})^p = \sqrt[n]{x^p}$ | $\sqrt[n]{x} = \sqrt[np]{x^p}$

$\sqrt[n]{\sqrt[p]{x}} = \sqrt[np]{x}$ | $\sqrt[n]{x} . \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x.y}$ | $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} ; y \neq 0$

4) اذا كانت *f* دالة متصلة و موجبة على مجال I فان الدالة $\sqrt[n]{f}$ **كذالك متصلة على المجال I .**

5) اذا كان $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \\ l \geq 0 \end{array}\right.$ **فان** $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$

6) اذا كان $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ **فان** $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$