نيابة : شيشاوة
ثانوية ابن الهيثم التأهيلية
إمنتانوت

الإمتحان التجريبي للبكالوريا

دورة أبريل 2010

المادة : الرياضيات
الشعب(ة) أو المسلك : شعبة العلوم الرياضية (ا) و (ب)
المعامل : 9
مدة الإنجاز : 4 س.

سلم التنقيط

التمرين الأول : (3 نقط)

نعتبر المجموعة E حيث : $E=\left\{z\in\mathbb{C}/z=x+iy;(x,y)\in\mathbb{R}^2;xy\succ 0\right\}$

1) أ- هل E جزء مستقر من $(\mathbb{C},+)$ ، علل جوابك ؟ — 0,5

ب- هل E جزء مستقر من $(\mathbb{C},\times)$ ، علل جوابك ؟ — 0,5

2) نزود المجموعة $\mathbb{C}$ بقانون التركيب الداخلي $*$ المعرف كما يلي : $\forall(z,z')\in\mathbb{C}^2;z*z'=xx'+iyy'$

حيث : $z=x+iy$ و $z'=x'+iy'$ و $(x,x',y,y')\in\mathbb{R}^4$.

ا- بين أن القانون $*$ قانون تركيب داخلي في المجموعة E . — 0,5

ب- بين أن : $(E,*)$ زمرة تبادلية . — 1

3) نعتبر التطبيق :

$$\begin{aligned} f:(E,*)&\to(\mathbb{R},+)\\ z=x+iy&\to\ln(xy)\end{aligned}$$

بين أن f تشاكل . — 0,5

التمرين الثاني : (4 نقط)

المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط A و B التي ألحاقها على التوالي : $Z_A=-1$ و $Z_B=3i$.

ليكن f التطبيق من $(P)\setminus\{A\}$ نحو (P) ، الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ حيث :

$$(1):z'=i\left(\frac{z-3i}{z+1}\right)$$

1) لتكن C لحقها Z_C حيث : $Z_C=2-i$

بين أنه توجد نقطة وحيدة D بحيث : $f(D)=C$ — 0,5

2) ماهي طبيعة المثلث ABC ، علل جوابك ؟ — 0,5

3) باستعمال العلاقة (1) بين أنه لكل نقطة M حيث : $M\neq A$ و $M\neq B$ لدينا :

$OM'=\dfrac{BM}{AM}$ و أن : $\overline{(\vec{u},\overrightarrow{OM'})}\equiv\overline{(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})}+\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ — 1

4) استنتج مجموعة النقط التالية :

(أ) المجموعة (E) للنقط M بحيث M' تنتمي غلى الدائرة (Γ) التي مركزها O وشعاعها 1 . **0,5**

(ب) المجموعة (F) للنقط M بحيث يكون لحق M' عددا حقيقيا . **0,5**

5) نعتبر الدوران R الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$ ، و لتكن $C_1 = R(C)$.

أ- حدد لحق النقطة C_1 . **0,5**

ب- بين أن النقطة C_1 تنتمي إلى المجموعة (F) . **0,5**

التمرين الثالث : (3 نقط)

I و II مستقلان .

I - نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) حيث : $(E):11x-5y=14$

1) حدد حل خاص (x_0 , y_0) للمعادلة (E) . **0,25**

2) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) . **1**

3) بين أن : $\exists!(x,y)\in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} / 11x-15y=14$ و $0\leq x\leq 5$. **0,5**

II - 1) تحقق أن : $\forall x\in \mathbb{R}; x(x+1)(x+2)(x+3)+1=\left(x^2+3x+1\right)^2$ **0,25**

2) ليكن $n\in \mathbb{N}$ بحيث $n\geq 3$ ، بين أنه في نظمة العد التي أساسها n لدينا : **1**

$$\overline{10}\times\overline{11}\times\overline{12}\times\overline{13}+1=\left(\overline{131}\right)^2$$

مسألة : (10 نقط)

$\ln$ يمثل دالة اللوغاريثم النبيري و e أساسها .

الجزء الأول :

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=-1+x-\ln(x)$

1) أدرس تغيرات الدالة g على المجال $]0,+\infty[$. **0,5**

2) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0,+\infty[$. **0,5**

الجزء الثاني :

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{x-\ln(x)} ; x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

ليكن (C) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) حدد حيز تعريف الدالة f ، (نرمز له ب D) . 0,5

2) بين أن f متصلة على اليمين في 0 . 0,5

3) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)$ ثم استنتج طبيعة الفرع اللانهائي للمنحنى $\left(C\right)$ بجوار $+\infty$. 0,75

4) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في 0 ، و اعط تأويلا هندسيا للنتيجة . 0,75

5) لتكن $f^{'}$ الدالة المشتقة للدالة f على المجال $]0,+\infty[$.

أ- أحسب $f^{'}\left(x\right)$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$. 0,5

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f . 0,5

6) أدرس الوضع النسبي للمنحنى $\left(C\right)$ بالنسبة للمستقيم $\left(\Delta\right)$ الذي معادلته : $y=1$. 0,25

7) أنشئ المنحنى $\left(C\right)$ في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. نأخذ $\left\|\vec{i}\right\|=1$ و $e\approx 2,7$. 0,75

(المنحنى $\left(C\right)$ يقبل نقطتي انعطاف x_1 و x_2 يحققان : $e\prec x_2$ و $0\prec x_1\prec e$) .

<u>الجزء الثالث :</u>

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $F\left(x\right)=\int_1^x f(t)dt$

1) أ- حدد منحى تغيرات الدالة F على المجال $]0,+\infty[$. 0,5

ب- استنتج إشارة $F(x)$ على المجال $]0,+\infty[$. 0,25

2) أ- بين أن : $\forall x\in\left]0,1\right];f(x)\le x$ 0,25

ب- استنتج أن : $\forall x\in\left]0,1\right];\dfrac{x^2-1}{2}\le F(x)\le 0$ 0,25

3) أ- بين أن : $\forall x\in\left[1,+\infty\right[;\dfrac{x}{x-\ln(x)}\le 1+\ln(x)$ 0,75

ب- استنتج أن : $\forall x\in\left[1,+\infty\right[;F(x)\le x\ln(x)$ 0,5

4) $t\in\left[1,+\infty\right[$ ، نعتبر المتتالية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_n=1+\dfrac{\ln(t)}{t}+\left(\dfrac{\ln(t)}{t}\right)^2+....+\left(\dfrac{\ln(t)}{t}\right)^n;n\succ 0 \\ u_0=1 \end{cases}$$

بين أن المتتالية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و حدد نهايتها . 1

5) أ- لكل x من المجال $\left[1,+\infty\right[$ ، أحسب التكامل $\int_1^x\left(1+\dfrac{\ln(t)}{t}\right)dt$. 0,5

ب- استنتج أن لكل x من المجال $\left[1,+\infty\right[$: $x-1+\dfrac{1}{2}\left(\ln(x)\right)^2\le F(x)$ 0,5