ج م ع	**المستقيم في المستوى** ملخص الدرس	ح.بوعيون

I- الأســــــاس

1) نسمي أساسا كل زوج $(\vec{i},\vec{j})$ مكون من متجهتين غير مستقيميتين $\vec{i}$ و $\vec{j}$.

2) ليكن $B=(\vec{i},\vec{j})$ أساس . كل متجهة $\vec{u}$ تكتب بطريقة وحيدة على شكل $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ الزوج (x,y) يسمى زوج إحداثيتي المتجهة $\vec{u}$ بالنسبة للأساس B ونكتب $\vec{u}(x,y)$ أو $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

ملاحظة: إذا أردنا تحديد إحداثيات المتجهة $\vec{u}$ بالنسبة للأساس. $B=(\vec{i},\vec{j})$ نقوم بحساب المتجهة $\vec{u}$ بدلالة $\vec{i}$ و $\vec{j}$. وإذا وجدنا $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ فإن زوج إحداثيتي $\vec{u}$ هو (x,y) ونكتب $\vec{u}(x,y)$.

3) ليكن $B=(\vec{i},\vec{j})$ أساسا.

a) لدينا $\vec{i}(1,0)$ و $\vec{j}(0,1)$

b) نعتبر المتجهتين $\vec{u}(x,y)$ و $\vec{v}(x',y')$

لدينا $\vec{u}+\vec{v}(x+x',y+y')$ و $\vec{u}-\vec{v}(x-x',y-y')$ و $\alpha\vec{u}(\alpha x,\alpha y)$

c) نعتبر المتجهتين $\vec{u}(x,y)$ و $\vec{v}(x',y')$

*) نسمي محددة المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ بالنسبة للأساس B . العدد الذي نرمز له ب $\det(\vec{u},\vec{v})$ والمعرف بما يلي:

$$\det(\vec{u},\vec{v})=\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}=xy'-yx'$$

*) تكون المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمتين إذا وفقط إذا كان $\det(\vec{u},\vec{v})\neq 0$

ملاحظة: 1) لتكن $\vec{i}$ و $\vec{j}$ متجهتين غير مستقيمتين.

*) إذا كان $\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}=\vec{0}$ فإن $\alpha=\beta=0$

*) إذا كان $\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}=\alpha'\vec{i}+\beta'\vec{j}$ فإن $\alpha=\alpha'$ و $\beta=\beta'$.

2) إذا كانت A و B و C ثلاث نقط غير مستقيمة فإن المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مستقيميتين. وبالتالي تكون أساسا .

II- المعلــــــم

1) نسمي معلما كل مثلوث $(o,\vec{i},\vec{j})$ حيث o نقطة و $\vec{i}$ و $\vec{j}$ متجهتين غير مستقيميتين.

2) نعتبر المعلم $R=(o,\vec{i},\vec{j})$

لكل نقطة M من المستوى المتجهة $\overrightarrow{OM}$ تكتب بطريقة وحيدة على شكل $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$ الزوج (x,y) يسمى زوج إحداثيتي النقطة M بالنسبة للمعلم R ونكتب $M(x,y)$ أو $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

ملاحظة: إذا أردنا تحديد إحداثيات M بالنسبة للمعلم $(o,\vec{i},\vec{j})$ نقوم بحساب $\overrightarrow{OM}$ بدلالة $\vec{i}$ و $\vec{j}$. إذا وجدنا $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$ فإن $M(x,y)$.

3) نعتبر المعلم $R=(o,\vec{i},\vec{j})$.

ونعتبر النقطتين $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$

*) لدينا $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A,y_B-y_A)$.

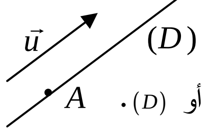
*) إذا كان I منتصف $[AB]$ فإن إحداثيات النقطة I هي:

$$x_I=\frac{x_A+x_B}{2} \quad , \quad y_I=\frac{y_A+y_B}{2}$$

ملاحظة: إذا كانت النقط A و B و C غير مستقيمة فإن المثلوث $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ معلم.

III- المستقيم في المستوى

1) تعريف: لتكن A نقطة و $\vec{u}$ متجهة غير منعدمة المستقيم المار من A والموجه بالمتجهة $\vec{u}$ هو مجموعة النقط M التي يكون من أجلها $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ مستقيمين ونرمزله ب $D(A,\vec{u})$ أو (D) .

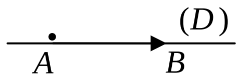


ملاحظة:

a) $M\in D(A,\vec{u})$ يعني $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ مستقيمين.

b) ليكن (D) مستقيم. كل متجهة موازية ل (Δ) تكون موجهة ل (D) .

c) المستقيم (AB) مار من A وموجه بالمتجهة $\overrightarrow{AB}$.



2) **تمثيل بارامتري لمستقيم.**

تعريف:

ليكن (D) المستقيم المار من $A(x_0,y_0)$ والموجه بالمتجهة $\vec{u}(a,b)$

تمثيل بارامتري للمستقيم (D) هو $(t\in IR)$ $\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\end{cases}$: (D)

هذا التمثيل البارامتري يعني أن (D) هو مجموعة النقط التي تكون احداثيتها على شكل $(1+3t,2-4t)$ حيث $t\in IR$.

يعني كلما عوضنا t بقيمة من IR نحصل على احداثيات نقطة من (D) .

مثلا من أجل $t=1$ نجد $x=4$ $y=-2$ إذن $M(4,-2)\in(D)$.

3) **معادلة ديكارتية لمستقيم.**

a) ليكن (D) المستقيم المار من $A(x_0,y_0)$ والموجه بالمتجهة $\vec{u}(a,b)$ للحصول على معادلة ديكارتية ل (D) نتبع ما يلي:

$M(x,y)\in(D)$ يعني $\det(\overrightarrow{AM},\vec{u})=0$

يعني $\begin{vmatrix}x-x_0 & a\\ y-y_0 & b\end{vmatrix}=0$

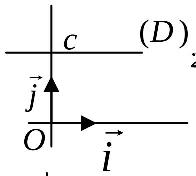
يعني $b(x-x_0)-a(y-y_0)$

نقوم بالنشر ونحصل على معادلة على شكل $Ax+By+C=0$ مع $(A,B)\neq(0,0)$ وهي معادلة ديكارتية ل (D) ونكتب $(D):Ax+By+C=0$.

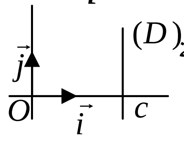
b) نعتبر المجموعة $(D):ax+by+c=0$

(D) مستقيم موجه بالمتجهة $\vec{u}(-b,a)$.

c) *) إذا كان (D) مستقيما موازيا لمحور الأفاصيل فإن المتجهة $\vec{i}(1,0)$ موجهة له وتكون معادلته على شكل $y=c$.



*) إذا كان (D) مستقيما موازيا لمحور الأراتيب فإن المتجهة $\vec{j}(0,1)$ موجهة له وتكون معادلته على شكل $x=c$.



*) محور الأفاصيل هو المستقيم المار من $o(0,0)$ والموجه ب $\vec{i}(1,0)$ معادلته $y=0$.

*) محور الأراتيب هو المستقيم المار من $o(0,0)$ والموجه ب $\vec{j}(0,1)$ معادلته $x=0$.

4) المرور من معادلة ديكارتية إلى تمثيل بارامتري والعكس.

أمثلة:

a) نعتبر المستقيم $(\Delta): x+2y-1=0$ للحصول على تمثيل بارامتري ل (Δ) نستخرج نقطة ومتجهة ل (Δ) أو: $y=t$ أو $x=t$ ونحسب الآخر.

مثلا: نضع $y=t$ إذن $x+2t-1=0$ يعني $x=1-2t$ إذن $(\Delta)\begin{cases}x=1-2t\\y=t\end{cases}$.

b) نعتبر المستقيم $(\Delta):\begin{cases}x=1+2t\,(1)\\y=3+t\ (2)\end{cases}$ للحصول على معادلة ديكارتية ل (Δ) نستخرج نقطة ومتجهة موجهة أو نحسب t في (1) أو (2) ونعوض في الأخرى.

مثلا: من (2) لدينا $t=-y-3$ وبالتعويض في (1) نجد $x=1-2y-6$ إذن $(\Delta): x+2y+5=0$.

5) الأوضاع النسبية لمستقيمين:

a) من أجل دراسة تقاطع المستقيمين (Δ) و (Δ') يمكن اتباع ما يلي:

i) إذا كان $(\Delta):\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\end{cases}$ ، $(\Delta'):\begin{cases}x=x_1+a't'\\y=y_1+b't'\end{cases}$

نقوم بحل النظمة $(S)\begin{cases}x_0+at=x_1+a't'\\y_0+bt=y_1+b't'\end{cases}$

*) إذا كان ل (S) حلا وحيدا $t=.$ و $t'=.$ فإن (Δ) و (Δ') يتقاطعان في نقطة ونحصل على إحداثياتهما بتعويض t في تمثيل (Δ) .

*) إذا كان للنظمة (S) مالا نهاية له من الحلول فإن $(\Delta')=(\Delta)$.

ii) إذا كان $(\Delta):\begin{cases}x=1+t\\y=-1+2t\end{cases}$ و $(\Delta'):2x-3y+1=0$

نقوم بحل النظمة $(S)\begin{cases}x=1+t & (1)\\y=-1+2t & (2)\\2x-3y+1=0 & (3)\end{cases}$

بتعويض x و y في (3) نحصل على معادلة من الدرجة

*) إذا كان لهذه المعادلة حل في (Δ) و (Δ') يتقاطعان في نقطة. نعوض t في (1) و (2) ونحصل عليها.

*) إذا كانت المعادلة لا تقبل حل فإن (Δ) و (Δ') متوزيان قطعا.

*) إذا كانت المعادلة تقبل ما لا نهاية له من الحلول فإن $(\Delta)=(\Delta')$.

iii) إذا كان $(\Delta): x+2y-1=0$ و $(\Delta'):2x-y+1=0$ نقوم بحل النظمة $(S)\begin{cases}2x-y+1=0\\x+2y-1=0\end{cases}$ نفس حالات i).

b) نعتبر المستقيمين $\begin{cases}(\Delta): ax+by+c=0\\(\Delta'): a'x+b'y+c'=0\end{cases}$

i) إذا كان $\begin{vmatrix}a&b\\a'&b'\end{vmatrix}\neq0$ فإن (Δ) و (Δ') متقاطعان ونحل النظمة للحصول على نقطة التقاطع.

ii) إذا كان $\begin{vmatrix}a&b\\a'&b'\end{vmatrix}=0$ فإن $(\Delta)//(\Delta')$

*) إذا كان $\begin{vmatrix}a&c\\a'&c'\end{vmatrix}\neq0$ أو $\begin{vmatrix}b&c\\b'&c'\end{vmatrix}\neq0$ فإن $(\Delta)//(\Delta')$ قطعا.

*) إذا كان $\begin{vmatrix}a&c\\a'&c'\end{vmatrix}=0$ أو $\begin{vmatrix}b&c\\b'&c'\end{vmatrix}=0$ فإن $(\Delta)=(\Delta')$.

c) إذا أردنا أن نبين أن (Δ) و (Δ') متوزيان أو غير متوازيين نختار متجهة $\vec{u}$ موجهة ل (Δ) و $\vec{v}$ موجهة ل (Δ') ونحسب $\det(\vec{u},\vec{v})$

i) إذا كان $\det(\vec{u},\vec{v})=0$ فإن $(\Delta)//(\Delta')$

ii) إذا كان $\det(\vec{u},\vec{v})\neq0$ فإن (Δ) و (Δ') متقاطعان.

d) إذا كان $(\Delta)//(\Delta')$ فإن أي متجهة موجهة لأحدهما موجهة للآخر.

6) المعادلة المختصرة لمستقيم

a) إذا كان (Δ) مستقيما غير موازي لمحور الآراتيب فإن معادلته تكتب على شكل $y=mx+p$ هذه المعادلة تسمى المعادلة المختصرة.

العدد ة يسمى المعامل الموجه أو ميل المستقيم (Δ) .

b) ليكن (Δ) مستقيم موجه بالمتجهة $\vec{u}(a,b)$ مع $a\neq0$ (يعني $(\Delta)\not\parallel(y'oy)$) المعامل الموجه ل (Δ) هو $m\frac{b}{a}$.

c) نعتبر المستقيمين $(\Delta): y=mx+p$ و $(\Delta'): y=m'x+p'$ يكون $(\Delta)//(\Delta')$

إذا وفقط كان $m=m'$