تصحيح الامتحان التجريبي
لمستوى الثانية علوم رياضية
المنجز يوم 27 ماي 2014

التمرين 1 : $G = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

1.أ) لدينا: $\forall [(a,b),(x,y)] \in G^2 : (x,y) * (a,b) = (xa - 2yb, xb + ya + 2yb)$

$= (ax - 2by ; ay + bx + 2by)$

$= (a,b) * (x,y)$

أي أن القانون $*$ تبادلي

ولدينا أيضا: $\forall [(a,b);(x,y);(c,d)] \in G^3 :$

$[(a,b) * (x,y)] * (c,d) = (ax - 2by, ay + bx + 2by) * (c,d)$

$= (axc - 2byc - 2ayd - 2bxd - 4byd ;$
$axd - 2byd + ayc + bxc + 2byc + 2ayd + 2bxd + 4byd)$

وأيضا: $(a,b) * [(x,y) * (c,d)] = (a,b) * (xc - 2yd, xd + cy + 2yd)$

$= (axc - 2yda - 2bxd - 2bcy - 4byd ;$
$axd + acy + 2ayd + bxc - 2byd + 2bxd + 2bcy + 4byd)$

إذن: $[(a,b) * (x,y)] * (c,d) = (a,b) * [(x,y) * (c,d)]$

أي أن القانون $*$ تجميعي ،

ب) نفترض أن القانون $*$ يقبل عنصرا محايدا (x,y)

إذن: $\forall (a,b) \in G : (a,b) * (x,y) = (a,b)$

$\Longrightarrow \forall (a,b) \in G : ax - 2by = a$

$\Longrightarrow x = 1$ و $y = 0$

عكسيا لدينا: $\forall (a,b) \in G : (a,b) * (1,0) = (a \times 1 - 2b \times 0 ; a \times 0 + 1b + 0)$

$= (a,b)$

إذن $(1,0)$ هو العنصر المحايد للقانون $*$.

ج) لنبين أن كل عنصر يقبل مماثلا في $(G,*)$.

ليكن $(a,b) \in G$. نفترض أنه يقبل مماثلا (x,y) في $(G,*)$

إذن: $(a,b) * (x,y) = (1,0)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} ax - 2by = 1 \\ bx + (a+2b)y = 0 \end{cases}$$

محددة النظمة هي: $\Delta = a^2 + 2ab + 2b^2$

$= (a+b)^2 + b^2$

وحيث أن $(a,b) \neq (0,0)$ فإن $\Delta \neq 0$ وبالتالي فإن النظمة تقبل