تصحيح الامتحان التجريبي
لمستوى الثانية علوم رياضية
المنجز يوم 27 ماي 2014

التمرين 1 :

$G = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

1.أ) لدينا : $\forall [(a,b),(x,y)] \in G^2 : (x,y) * (a,b) = (xa - 2yb, xb + ya + 2yb)$

$= (ax - 2by ; ay + bx + 2by)$

$= (a,b) * (x,y)$

أي أن القانون $*$ تبادلي

و لدينا أيضا : $\forall [(a,b);(x,y);(c,d)] \in G^3 :$

$[(a,b) * (x,y)] * (c,d) = (ax - 2by, ay + bx + 2by) * (c,d)$

$= (axc - 2byc - 2ayd - 2bxd - 4byd ;$

$axd - 2byd + ayc + bxc + 2byc + 2ayd + 2bxd + 4byd)$

و أيضا : $(a,b) * [(x,y) * (c,d)] = (a,b) * (xc - 2yd, xd + cy + 2yd)$

$= (axc - 2yda - 2bxd - 2bcy - 4byd ;$

$axd + acy + 2ayd + bxc - 2byd + 2bxd + 2bcy + 4byd)$

إذن : $[(a,b) * (x,y)] * (c,d) = (a,b) * [(x,y) * (c,d)]$

اي أن القانون $*$ تجميعي ،

ب) نفترض أن القانون $*$ يقبل عنصرا محايدا (x,y)

إذن : $\forall (a,b) \in G : (a,b) * (x,y) = (a,b)$

$\Longrightarrow \forall (a,b) \in G : ax - 2by = a$

$\Longrightarrow x = 1$ و $y = 0$

عكسيا لدينا : $\forall (a,b) \in G : (a,b) * (1,0) = (a \times 1 - 2b \times 0 ; a \times 0 + 1b + 0)$

$= (a,b)$

إذن $(1,0)$ هو العنصر المحايد للقانون $*$.

ج) لنبين أن كل عنصر يقبل مماثلا في $(G,*)$.

ليكن $(a,b) \in G$. نفترض أنه يقبل مماثلا (x,y) في $(G,*)$

إذن : $(a,b) * (x,y) = (1,0)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} ax - 2by = 1 \\ bx + (a+2b)y = 0 \end{cases}$$

محددة النظمة هي : $\Delta = a^2 + 2ab + 2b^2$

$= (a+b)^2 + b^2$

و حيث أن $(a,b) \neq (0,0)$ فإن $\Delta \neq 0$ و بالتالي فإن النظمة تقبل

حلا وحيدا وهو : (x,y) حيث :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2b \\ 0 & a+2b \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{a+2b}{a^2+2ab+2b^2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-b}{a^2+2ab+2b^2}$$

وحيث أن $a \neq 0$ أو $b \neq 0$ فإن $x \neq 0$ أو $y \neq 0$ أي أن $(x,y) \in G$

ونتحقق أن :

$$(a,b) * \left(\frac{a+2b}{\Delta} ; \frac{-b}{\Delta} \right) = (1,0)$$

أي أن العنصر (a,b) يقبل مماثلا له $\left(\frac{a+2b}{\Delta}, \frac{-b}{\Delta}\right)$ في $(G,*)$.

وحسب ما سبق نعلم أن القانون $*$ تبادلي وتجميعي

ويقبل $(1,0)$ عنصرا محايدا في G اذن $(G,*)$ زمرة تبادلية.

2) أ- لكل (a,b) و (x,y) من G لدينا :

$$M_{(a,b)} \times M_{(x,y)} = \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & y \\ -2y & x+2y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ax-2by & ay+bx+2by \\ -2bx-2ay-4by & -2by+ax+2ay+2bx+4by \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ax-2by & ay+bx+2by \\ -2(ay+bx+2by) & ax-2by+2(ay+bx+2by) \end{pmatrix}$$

$$= M_{(ax-2by \,;\, ay+bx+2by)}$$

أي أن : $M_{(a,b)} * M_{(x,y)} = M_{(a,b)*(x,y)}$

ب- لنبين أن φ تشاكل تقابلي من $(G,*)$ نحو $(E,\times)$ لدينا :

$$\forall [(a,b),(x,y)] \in G^2 : \varphi[(a,b)*(x,y)] = M_{(a,b)*(x,y)}$$

$$= M_{(a,b)} \times M_{(x,y)}$$

$$= \varphi((a,b)) \times \varphi((x,y))$$

أي أن φ تشاكل من $(G,*)$ نحو $(E,\times)$.

ومن جهة ثانية لدينا :

اذا كانت $M \in E$ فإنه يوجد زوج وحيد (a,b) حيث : $M = M_{(a,b)}$

ليكن $(x,y) \in G$ حيث : $\varphi(x,y) = M$

$$\Longrightarrow M_{(x,y)} = M_{(a,b)} \Longrightarrow x = a \text{ و } y = b$$

أي أن φ تقابل ، اذن φ تشاكل تقابلي من $(G,*)$ نحو $(E,\times)$.

ج- لدينا φ تشاكل تقابلي من $(G,*)$ نحو $(E,\times)$ و $(G,*)$ زمرة تبادلية. إذن $(E,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها الحايد هو:

$$\varphi((1,0)) = M_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ومقلوب المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ هي المصفوفة:

$$A^{-1} = M_{(3,-2)}^{-1} = \varphi((3,-2))^{-1} = \varphi((3,-2)')$$

حيث $(3,-2)'$ هو مماثل $\boxed{(3,-2)}$ في الزمرة $(G,*)$ وهو:

$$(3,-2)' = \left(\frac{3+2\times(-2)}{(3-2)^2+(-2)^2} ; \frac{2}{5}\right) = \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

وبالتالي:

$$A^{-1} = \varphi\left(\left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)\right) = M_{\left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

التمرين 2:

1) المميز المختصر للمعادلة $(E) : z^2 - 2iz - 2 = 0$ هو:

$$\Delta' = (-i)^2 - (-2) = -1 + 2 = 1 \neq 0$$

إذن (E) تقبل حلين عقديين مختلفين وهما: $i-1$ و $i+1$

ومجموعة حلولها هي $S = \{-1+i, 1+i\}$

2) أ) a و b هما حلي (E) و $Re(a) > 0$ يعني: $a = 1+i$ و $b = -1+i$

لدينا: $|a| = |b| = \sqrt{2}$ إذن $a = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ و $b = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

أي: $b = \sqrt{2}e^{i(\pi - \pi/4)}$ أي $b = \sqrt{2}e^{i3\pi/4}$

ومنه:

$$a^n + b^n = \sqrt{2}^n\left(e^{in\pi/4} + e^{i3n\pi/4}\right)$$

$$= 2^{n/2} \cdot e^{i\frac{\frac{n\pi}{4}+\frac{3n\pi}{4}}{2}} \cdot \left(e^{i\frac{n\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}} + e^{i\frac{3\pi n}{4} - \frac{n\pi}{2}}\right)$$

$$= 2^{n/2} \cdot e^{i\frac{n\pi}{2}} \cdot \left(e^{-i\frac{n\pi}{4}} + e^{i\frac{n\pi}{4}}\right) = 2^{n/2} \cdot e^{i\frac{n\pi}{2}} \cdot 2\cos\frac{n\pi}{4}$$

$$\Rightarrow z_n = \frac{a^n + b^n}{2} = 2^{n/2} \cdot \left(\cos\frac{n\pi}{4}\right) \cdot e^{in\pi/2}$$

ب) لكي يكون z_n تخيليا صرفا يجب أن يكون لدينا $Re(z_n) = 0$

أي: $2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4}\cos\frac{n\pi}{2} = 0$

أي: $\frac{n\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ أو $\frac{n\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ حيث $k \in \mathbb{N}$.

أي: $n = 2 + 4k$ أو $n = 1 + 2k$ حيث $k \in \mathbb{N}$.

وحيث أن $50 \wedge 11 = 1$ لأن $50p - 11q = 1$ (بيزو)

فإنه حسب مبرهنة كوص نستنتج أن: 11 يقسم $x - 2$

اي يوجد $k \in \mathbb{Z}$ حيث: $x - 2 = 11k$ ، وبالتعويض في (2)

نحصل على: $50 \times 11k = 11 \times (y - 9)$

$\Rightarrow y - 9 = 50k \Rightarrow y = 50k + 9$

عكسيا لدينا الزوج $(11k + 2, 50k + 9)$ تحقق (1) لأن:

$50(11k + 2) - 11(50k + 9) = 1$

اذن مجموعة حلول (1) هي:

$S = \{(11k + 2; 50k + 9) / k \in \mathbb{Z}\}$

2) أ) لدينا 11 عدد أولي و $a \wedge 11 = 1$ إذن حسب مبرهنة فيرما فإن:

$a^{10} \equiv 1 \ [11]$ اي $a^{11-1} \equiv 1 \ [11]$

أي أن باقي القسمة الاقليدية لـ a^{10} على 11 هو 1.

ب) لدينا: $p + q = 61n + 11$

اذن: $a^{p+q} = a^{60n} \times a^{n} \times a^{11}$

ولدينا: $a^{11} \equiv a \ [11]$ و $a^{60n} = (a^{10})^{6n} \equiv 1 \ [11]$

اذن: $a^{p+q} \equiv 1 \times a \times a^{n} \equiv a^{n+1} \ [11]$

ج) للحصول على $a^{p+q} \equiv 1 \ [11]$ اي $a^{n+1} \equiv 1 \ [11]$

وحيث أن: $a^{10} \equiv 1 \ [11]$ ، فإنه يكفي أن نختار:

$10 / n + 1$ اي: $\exists k \in \mathbb{N}^* : n + 1 = 10k$

$\Rightarrow n = 10k - 1 \ ; k \in \mathbb{N}^*$

إذن توجد مجموعة غير منتهية وهي $\{10k - 1 / k \in \mathbb{N}^*\}$

من اعداد صحيحة طبيعية تحقق العلاقة $a^{p+q} \equiv 1 \ [11]$.

السؤال هنا هو كم عدد من الأعداد الطبيعية تحقق ذلك الشرط؟

التمرين 5:

1) لندرس رتابة المتالية. لدينا:

$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n = \int_0^{n+1} \frac{x}{e^x - x} dx - \int_0^{n} \frac{x}{e^x - x} dx$

$= \cancel{\int_0^{n} \frac{x}{e^x - x}} + \int_n^{n+1} \frac{x}{e^x - x} dx - \cancel{\int_0^{n} \frac{x}{e^x - x} dx}$

ولدينا: $\forall x \in [n, n+1] : \begin{cases} x \geq 0 \\ e^x - x > 0 \end{cases}$

التعليل: نضع: $g(x) = e^x - x$ اذن $\forall x > 0 : g'(x) = e^x - 1 > 0$

اي ان g تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$ اذن $\forall x \in \mathbb{R}^+ : g(x) \geq g(0)$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad e^x - x \geq 1$

وبالتالي: $\int_n^{n+1} \frac{x}{e^x - x} dx \geq 0$ اذن (u_n) تزايدية.

2- أ) . نضع : $\forall x \in \mathbb{R}^+ : h(x) = e^x - x - \frac{e^x}{2} = \frac{e^x}{2} - x$

اذن : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad h'(x) = \frac{e^x}{2} - 1 = \frac{e^x - 2}{2}$

اذن h تزايدية قطعا على $[\ln 2, +\infty[$ و تناقصية قطعا على $[0, \ln 2]$

$[e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \ln 2 \quad , \quad e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \ln 2]$

و منه h تقبل قيمة دنيا على $\mathbb{R}^+$ عند $\ln 2$ اي :

$\forall x \in \mathbb{R}^+ : \quad h(x) \geq h(\ln 2)$

و حيث أن : $h(\ln 2) = 1 - \ln 2 = \ln \frac{e}{2} > 0$ لأن $\frac{e}{2} > 1$

فإن : $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \quad e^x - x \geq \frac{e^x}{2}$

• ليكن $n \in \mathbb{N}$. لدينا : $0 \leq n$

و لدينا : $\forall x \in [0, n] : \quad \frac{1}{e^x - x} \leq 2 e^{-x}$

$\Rightarrow \quad \frac{x}{e^x - x} \leq 2x e^{-x}$

اذن : $\int_0^n \frac{x}{e^x - x} dx \leq \int_0^n 2x e^{-x} dx$. لنحسب التكامل $\int_0^n 2x e^{-x} dx$ بمكاملة

بالأجزاء : نضع $\begin{cases} u(x) = 2x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases}$ و $\begin{cases} u'(x) = 2 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$

$\Rightarrow \quad \int_0^n 2x e^{-x} dx = \left[-2x e^{-x}\right]_0^n + \int_0^n 2 e^{-x} dx$

$= -2n e^{-n} + \left[-2 e^{-x}\right]_0^n$

$= -2n e^{-n} - 2e^{-n} + 2$

و حيث أن : $\forall n \in \mathbb{N} : -2ne^{-n} - 2e^{-n} < 0$ فإن : $\int_0^n 2x e^{-x} dx \leq 2$

اذن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq 2$

3) المتتالية (u_n) مكبورة بالعدد 2 و هي تزايدية

اذن حسب مصاديق التقارب فإن (u_n) متقاربة .

التمرين 3 :

(1 $\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t} = \int_x^{x^2} \frac{\frac{1}{t}}{\ln t} dt = \int_x^{x^2} \frac{\ln' t}{\ln t} dt = \left[\ln|\ln t|\right]_x^{x^2}$

$= \ln(\ln x^2) - \ln(\ln x) \quad ; \quad (x > 1)$

$= \ln(2 \ln x) - \ln(\ln x)$

$= \ln 2 + \ln(\ln x) - \ln(\ln x) = \ln 2$

2- أ) لدينا : $\forall x > 1 ; \forall t \in [x, x^2] : \quad x \leq t \leq x^2$

$\Rightarrow \quad \frac{x}{t \ln t} \leq \frac{t}{t \ln t} \leq \frac{x^2}{t \ln t}$

$$\Rightarrow \frac{x}{t\ln t} \leq \frac{1}{\ln t} \leq \frac{x^2}{t\ln t}$$

ولدينا: $x>1 \Rightarrow x^2 > x$

اذن خاصية ترتيب التكامل:

$$\int_x^{x^2} \frac{x}{t\ln t}\,dt \leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt \leq \int_x^{x^2} \frac{x^2}{t\ln t}\,dt$$

$$\Rightarrow x\ln 2 \leq F(x) \leq x^2 \ln 2$$

ب) لدينا:

$$\lim_{x\to 1^+} x\ln 2 = \lim_{x\to 1^+} x^2\ln 2 = \ln 2 = F(1)$$

اذا: $\lim_{x\to 1^+} F(x) = F(1)$ أي أن F متصلة على اليمين في 1.

3) لدينا: $\forall x>1 \quad ; \quad F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt$

وحيث أن الدالة $f: t \longmapsto \frac{1}{\ln t}$ متصلة على $I =]1,+\infty[$

والدالتين $u: x \longmapsto x$ و $v: x \longmapsto x^2$ قابلتين

للاشتقاق على المجال $]1,+\infty[= E$ و $u(E) = v(E) = I$

فإن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $E =]1,+\infty[$ ولدينا:

$$F'(x) = v'(x)\,f(v(x)) - u'(x)\,f(u(x))$$

أي: $F'(x) = 2x \cdot \frac{1}{\ln x^2} - \frac{1}{\ln x}$

$(\ln x^2 = 2\ln x)$ أي: $F'(x) = \frac{x-1}{\ln x}$

4) ليكن $x>1$.

لدينا F متصلة على المجال $[1,x]$ لأنها متصلة على اليمين في 1

وقابلة للاشتقاق على $]1,+\infty[$.

ولدينا F قابلة للاشتقاق على $]1,x[$، اذن حسب

مبرهنة التزايدات المنتهية يوجد عدد c من $]1,x[$

حيث: $F(x) - F(1) = (x-1)\,F'(c)$

أي: $\frac{F(x)-F(1)}{x-1} = \frac{c-1}{\ln c}$

لندرس تغيرات الدالة F' لدينا: $F''(x) = \frac{x\ln x + 1 - x}{x\ln^2 x}$

نضع: $\forall x>1 ; \; u(x) = x\ln x + 1 - x$

لدينا: $\forall x>1 : u'(x) = \ln x > 0$ اذن: $\forall x>1 ; u(x) > u(1) = 0$

أي أن: $\forall x>1 : F''(x) > 0$ اذن: F' تزايدية قطعا على $]1,+\infty[$

وحيث $x < c < x^2$ فإن: $F'(x) < F'(c) < F'(x^2)$

ولدينا: $\lim_{x\to 1^+} F'(x^2) = \lim_{x\to 1^+} F'(x) = 1$ لأن: $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

وحيث أن $F'(c)=\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$ فإن $\lim_{x\to1^+}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}=1$

إذن F قابلة للاشتقاق على اليمين في 1 و $F'_d(1)=1$ ،

5) لدينا حسب 2) أ) : $\forall x>1 : F(x)\geq x\ln 2$

وحيث : $\lim_{x\to+\infty} x\ln 2=+\infty$ فإن $\lim_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$

ولدينا : $\forall x>1 : F'(x)=\frac{x-1}{\ln x}>0$ إذن F تزايدية

قطعا على $[1,+\infty[$.

جدول تغيرات F :

x	1 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\ln 2$ $\nearrow$ $+\infty$

6- أ) ليكن $x>1$ ، لدينا $x^2>x$ ولكل t من $[x,x^2]$ لدينا :

$\ln x\leq\ln t\leq\ln x^2$ إذن : $\frac{1}{\ln t}\geq\frac{1}{2\ln x}$

ومنه : $\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}dt\geq\int_x^{x^2}\frac{1}{2\ln x}dt$ أي $F(x)\geq\frac{x^2-x}{2\ln x}$

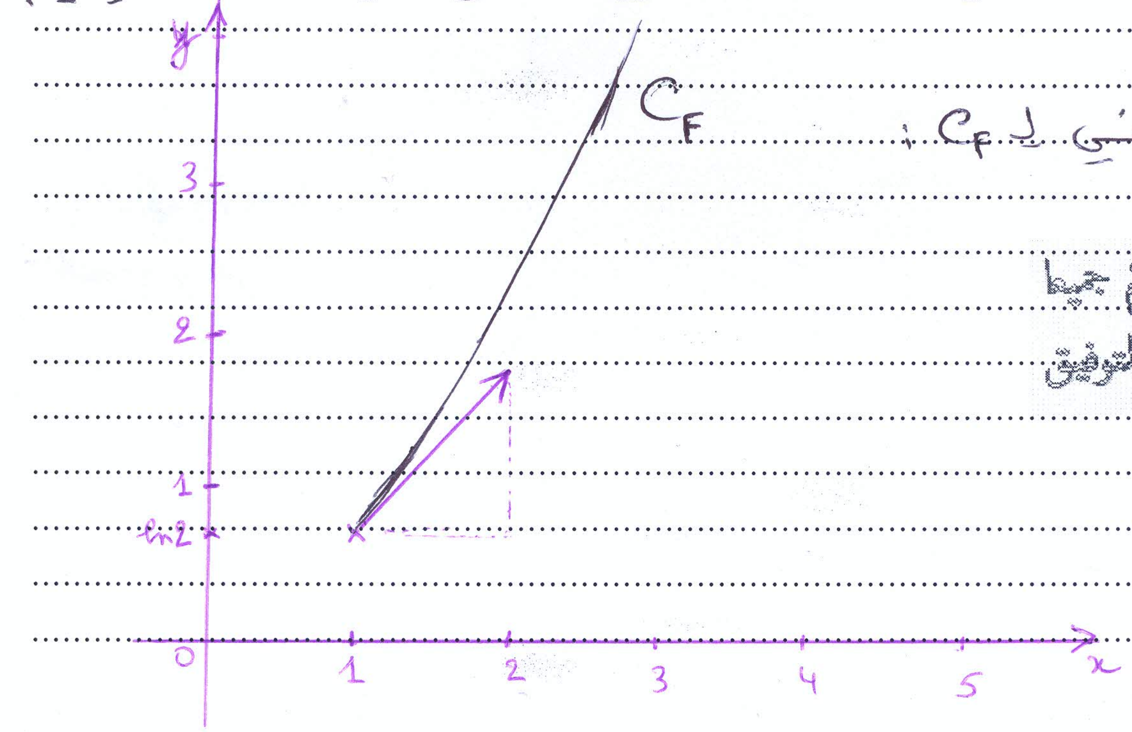
وحيث أن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x}{2\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{2\frac{\ln x}{x^2}}=+\infty$

لأن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0^+$

فإن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=+\infty$ ولدينا $\lim_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$

إذن C_F يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$ في اتجاه محور الأراتيب

ب) تمثيل مبياني لـ C_F :



مع تمنياتي لكم جميعا

بالنجاح و التوفيق