تصحيح الإمتحان التجريبي لمادة الرياضيات

دورة ماي 2010

- **التمرين رقم 01:**

نزود المجموعة $\mathbb{R}^2$ بقانون التركيب الداخلي T المعرف بما يلي :

$$(x,y)\mathrm{T}(a,b)=(xa-yb,xb+ya+2yb)$$

و نعتبر المجموعة الجزئية : $G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x+y\neq 0\}$.

1)- لنبين أن G جزء مستقر من $(\mathbb{R}^2,\mathrm{T})$.

➔ لكل $(x,y)\in G$ و لكل $(a,b)\in G$ ، لدينا :

$$(x,y)\mathrm{T}(a,b)=(xa-yb,xb+ya+2yb)$$

و $(xa-yb)+(xb+ya+2yb)=(x+y)(a+b)$

و بما أن : $(x,y)\in G$ و $(a,b)\in G$ ، فإن : $x+y\neq 0$ و $a+b\neq 0$

إذن : $(xa-yb,xb+ya+2yb)\in G$

بمعنى أن : $(x,y)\mathrm{T}(a,b)\in G$.

و منه فإن G جزء مستقر من $(\mathbb{R}^2,\mathrm{T})$.

➔ بين أن (G,T) زمرة تبادلية .

⇦ لكل (x,y) و (a,b) من G ، لدينا :

$$\begin{aligned}(x,y)\mathrm{T}(a,b)&=(xa-yb,xb+ya+2yb)\\&=(ax-by,bx+ay+2by)\\&=(a,b)\mathrm{T}(x,y)\end{aligned}$$

إذن القانون T تبادلي في G .

⇦ لكل (x,y) و (a,b) و (α,β) من G ، لدينا :

$$[(x,y)\mathrm{T}(a,b)]\mathrm{T}(\alpha,\beta)=(xa-by,bx+ya+2yb)\mathrm{T}(\alpha,\beta)$$

$$=\begin{pmatrix}[xa-yb]\alpha-[xb+ya+2yb]\beta,\\ [xa-yb]\beta+[xb+ya+2yb]\alpha+2[xb+ya+2yb]\beta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}x[a\alpha-b\beta]-y[b\alpha+a\beta+2b\beta],\\ x[a\beta+b\alpha+2b\beta]+y[a\alpha-b\beta]+2y[b\alpha+a\beta+2b\beta]\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}&=(x,y)\mathrm{T}(a\alpha-b\beta,b\alpha+a\beta+2b\beta)\\&=(x,y)\mathrm{T}[(a,b)\mathrm{T}(\alpha,\beta)]\end{aligned}$$

إذن القانون T تجميعي في G .

⇦ نبحث عن عنصر (a,b) من G بحيث :

$$\forall(x,y)\in G;(x,y)\mathrm{T}(a,b)=(x,y)$$

أي أن : $\forall(x,y)\in G;\begin{cases}xa-yb=x\\xb+ya+2yb=y\end{cases}$.

نأخذ : $(x,y)=(1,0)$ ، فنحصل على : $\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}$.

عكسيا ، لكل (x,y) من G ، لدينا : $\begin{cases}x\times1-y\times0=x\\x\times0+y\times1+2y\times0=y\end{cases}$.

إذن ، القانون T يقبل عنصرا محايدا في G هو الزوج $(1,0)$.

⇦ ليكن (a,b) عنصرا من G .

لنحل في G المعادلة : $(\mathrm{E}):(x,y)\mathrm{T}(a,b)=(1,0)$ ، لدينا :

$$(\mathrm{E})\Leftrightarrow\begin{cases}xa-yb=1\\xb+ya+2yb=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}ax-by=1\\bx+(a+2b)y=0\end{cases}$$

محددة هذه النظمة هي : $\Delta=\begin{vmatrix}a&-b\\b&2a+b\end{vmatrix}=(a+b)^2$.

و بما أن $(a,b)\in G$ فإن $a+b\neq0$ ، إذن : $\Delta\neq0$.

و بالتالي ، فإن النظمة السابقة تقبل حلا وحيدا (x,y) بحيث :

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}a&0\\b&1\end{vmatrix}}{(a+b)^2}=\frac{-b}{(a+b)^2} \quad \text{و} \quad x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}1&-b\\0&a+2b\end{vmatrix}}{(a+b)^2}=\frac{2a+b}{(a+b)^2}$$

و بما ان : $x+y=\frac{1}{a+b}\neq 0$ ، فإن : $(x,y)\in G$

إذن ، كل عنصر (a,b) من G يقبل مماثلا بالنسبة للقانون T و هذا المماثل هو :

$$(a,b)'=\left(\frac{a+2b}{(a+b)^2},\frac{-b}{(a+b)^2}\right) .$$

⇦ خلاصة :

بما أن القانون T تبادلي و تجميعي و يقبل عنصرا محايدا و لكل عنصر من G مماثل فإن (G,T) زمرة تبادلية .

2)- لتكن المجموعة : $\mathrm{E}=\left\{M(x,y)=\begin{pmatrix}x+y&y\\0&x+y\end{pmatrix}/(x,y)\in G\right\}$.

أ- لنبين أن E جزء مستقر من $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

⇦ لكل (x,y) و (a,b) من G ، لدينا :

$$\begin{aligned}M(x,y)\times M(a,b)&=\begin{pmatrix}x+y&y\\0&x+y\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a+b&b\\0&a+b\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}(x+y)(a+b)&(x+y)b+y(a+b)\\0&(x+y)(a+b)\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}xa-yb+xb+ya+2yb&xb+ya+2yb\\0&xa-yb+xb+ya+2yb\end{pmatrix}\\&=M(xa-yb,xb+ya+2by)\\&=M((x,y)\mathrm{T}(a,b))\end{aligned}$$

و بما أن (x,y) و (a,b) ينتميان إلى G ، فإن : $(x,y)\mathrm{T}(a,b)\in G$

إذن : E جزء مستقر من $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

ب- لنبين أن التطبيق : $\begin{array}{l}f:G\to\mathrm{E}\\(x,y)\mapsto M(x,y)\end{array}$ ، تشاكل من (G,T) نحو $(\mathrm{E},\times)$.

⇦ لكل (x,y) و (a,b) من G ، لدينا :

$$\begin{aligned}f((x,y)\mathrm{T}(a,b))&=M((x,y)\mathrm{T}(a,b))\\&=M(x,y)\times M(a,b)\\&=f(x,y)\times f(a,b)\end{aligned}$$

إذن f تشاكل من (G,T) نحو $(\mathrm{E},\times)$.

← نبين أن f تقابلي .

⇦ لكل (x,y) و (a,b) من G ، لدينا :

$$\begin{aligned}f(x,y)=f(a,b)&\Leftrightarrow M(x,y)=M(a,b)\\&\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x+y&y\\0&x+y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b&b\\0&a+b\end{pmatrix}\\&\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=a+b\\y=b\end{cases}\\&\Leftrightarrow\begin{cases}x=a\\y=b\end{cases}\\&\Leftrightarrow(x,y)=(a,b)\end{aligned}$$

إذن التطبيق f تبايني .

⇦ لدينا : $(\forall M\in\mathrm{E}),(\exists(x,y)\in G)/M=\begin{pmatrix}x+y&y\\0&x+y\end{pmatrix}$

إذن : $M=M(x,y)=f(x,y)$

إذن التطبيق f شمولي .

و بالتالي ، فإن f تشاكل تقابلي من (G,T) نحو $(\mathrm{E},\times)$.

و بما أن (G,T) زمرة تبادلية ، فإن $(\mathrm{E},\times)$ أيضا زمرة تبادلية .

ب- لكل (x,y) من G ، لدينا :

$$\begin{aligned}\left[M(x,y)\right]^{-1} &= \left[f(x,y)\right]^{-1}\\ &= f\left[(x,y)'\right]\\ &= f\left(\frac{x+2y}{(x+y)^2},\frac{-y}{(x+y)^2}\right)\\ &= M\left(\frac{x+2y}{(x+y)^2},\frac{-y}{(x+y)^2}\right)\\ &= \begin{pmatrix}\dfrac{1}{x+y} & \dfrac{-y}{(x+y)^2}\\ 0 & \dfrac{1}{x+y}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

3)- لنحل في E المعادلة : $X^2=\mathrm{I}_2$.

نضع : $X=M(x,y)$ ، حيث $(x,y)\in G$ ، إذن :

$$X^2=\mathrm{I}_2 \Leftrightarrow \left[M(x,y)\right]^2=\mathrm{I}_2 \Leftrightarrow \left[M(x,y)\right]^{-1}=M(x,y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}\dfrac{1}{x+y} & \dfrac{-y}{(x+y)^2}\\ 0 & \dfrac{1}{x+y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y & y\\ 0 & x+y\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{1}{x+y}=x+y\\ \dfrac{-y}{(x+y)^2}=y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+y)^2=1\\ y\left[1+(x+y)^2\right]=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}|x+y|=1\\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|x|=1\\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow (x,y)\in\{(-1,0);(1,0)\}$$

و منه فإن المعادلة : $X^2=\mathrm{I}_2$ ، تقبل حلين في E هما : $M(1,0)=\mathrm{I}_2$ و $M(-1,0)=-\mathrm{I}_2$.

• التمرين رقم 02:

1)- ليكن R التحويل الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث :

$z'=iz+(1+i)$.

أ- نضع : $a=i$ و $b=1+i$.

بما أن : $a\in\mathbb{C}-\{1\}$ و $|a|=1$ ، فإن R دوران لحق مركزه Ω هو :

$$\omega=\frac{b}{1-a}=\frac{1+i}{1-i}=i$$

و قياس زاويته هو : $\arg(a)=\arg(i)=\dfrac{\pi}{2}$.

ب- لكل z من $\mathbb{C}$ ، لدينا :

$$\begin{aligned}R^{-1}(M')=M \Leftrightarrow R(M)=M' &\Leftrightarrow z'=iz+(1+i)\\ &\Leftrightarrow -iz'=z-i(1+i)\\ &\Leftrightarrow -iz'=z+1-i\\ &\Leftrightarrow z=-iz'-1+i\end{aligned}$$

إذن الدوران R^{-1} يربط النقطة $M'(z')$ بالنقطة $M(z)$ بحيث :

$z=-iz'-1+i$.

2)- نعتبر في $\mathbb{C}$: $(\mathrm{E}): -iz^3-3(1+i)z^2-6z-10+2i=0$.

أ- لكل z من $\mathbb{C}$ ، لدينا :

$$\begin{aligned}(z')^3 &= \left[iz+(1+i)\right]^3\\ &= (iz)^3+3(iz)^2(1+i)+3iz(1+i)^2+(1+i)^3\\ &= -iz^3-3(1+i)z^2+3iz\times 2i+2i(1+i)\\ &= -iz^3-3(1+i)z^2-6z-2+2i\end{aligned}$$

إذن : $(z')^3-8=-iz^3-3(1+i)z^2-6z-10+2i$

و بالتالي ، يكون z حلا للمعادلة (E) إذا و فقط إذا كان :

$$-iz^3-3(1+i)z^2-6z-10+2i=0$$

أي : $(z')^3-8=0$

أي : $(z')^3=8$

بمعنى أن z' جذر مكعب للعدد 8 .

ب- بما أن $2^3=8$ فإن 2 جذر مكعب للعدد 8 .

و الجذور المكعبة للعدد 8 هي : 2 و $2j$ و $2\overline{j}$ حيث : $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. و منه :

$$(\mathrm{E})\Leftrightarrow z'\in\{2;2j;2\overline{j}\}$$

$$\Leftrightarrow z\in\{-2i-1+i;-2ij-1+i;-2i\overline{j}-1+i\}$$

$$\Leftrightarrow z\in\{-1-i;(\sqrt{3}-1)+2i;-(\sqrt{3}+1)+2i\}$$

و بالتالي فإن : $S=\{-(1+i);(\sqrt{3}-1)+2i;-(\sqrt{3}+1)+2i\}$.

ج- لتكن A و B و C النقط التي ألحاقها على التوالي :

$a=-(1+i)$ و $b=(\sqrt{3}-1)+2i$ و $c=-(\sqrt{3}+1)+2i$

و نضع : $A'=R(A)$ و $B'=R(B)$ و $C'=R(C)$

ألحاق النقط : A' و B' و C' هي على التوالي : 2 و $2j$ و $2\overline{j}$ و المثلث $A'B'C'$ محاط بالدائرة (C') التي مركزها O و شعاعها $r=2$.

⇦ لكل z من $\mathbb{C}$ ، لدينا :

$$|iz+(1+i)|=2\Leftrightarrow|z'|=2$$

$$\Leftrightarrow M'(z')\in(C')$$

$$\Leftrightarrow M(z)\in R^{-1}(C')$$

إذن ، مجموعة النقط $M(z)$ بحيث : $|iz+(1+i)|=2$ هي صورة الدائرة (C') (المحيطة بالمثلث $A'B'C'$) بالدوران R^{-1} أي الدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABC .

لأن : $A=R^{-1}(A')$ و $B=R^{-1}(B')$ و $C=R^{-1}(C')$.

⇦ مركز الدائرة (C) هو $O'=R^{-1}(O)$ و لحقه هو : $\omega'=-1+i$.

● **التمرين رقم 03:**

⇦ نعتبر في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة : $(\mathrm{E}):28x-15y=-6$.

1)- أ- لدينا :

$$28\times3-15\times6=84-90=-6$$

إذن ، الزوج $(3,6)$ حل خاص للمعادلة (E) .

ب- لكل (x,y) من $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ، لدينا :

$$(\mathrm{E})\Leftrightarrow 28x-15y=28\times3-15\times6$$

$$\Leftrightarrow 28(x-3)=15(y-6)$$

إذن : $15/28(x-3)$

و بما أن : $28\wedge15=1$ فإن حسب مبرهنة كوص : $15/(x-3)$.

و منه فإن :

$$(\mathrm{E})\Leftrightarrow\begin{cases}15/(x-3)\\28(x-3)=15(y-6)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow(\exists k\in\mathbb{Z})/\begin{cases}x-3=15k\\28\times15k=15(y-6)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow(\exists k\in\mathbb{Z})/\begin{cases}x=3+15k\\y=6+28k\end{cases}$$

و بالتالي : $S=\{(3+15k,6+28k)/k\in\mathbb{Z}\}$.

2)- نحل في $\mathbb{Z}$ النظمة : $(S):\begin{cases}z\equiv8[28]\\z\equiv2[15]\end{cases}$.

⇦ لكل z من $\mathbb{Z}$ ، لدينا :

$$(S)\Leftrightarrow\begin{cases}28/(z-8)\\15/(z-2)\end{cases}\Leftrightarrow\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{Z}^2/\begin{cases}z-8=28\alpha\\z-2=15\beta\end{cases}$$

إذن : $(z-8)-(z-2)=28\alpha-15\beta$

بمعنى أن : $28\alpha-15\beta=-6$

إذن : $(\alpha,\beta)=(3+15k,6+28k)/k\in\mathbb{Z}$

و منه : $z-8=28(3+15k)/k\in\mathbb{Z}$

أي : $z=92+420k/k\in\mathbb{Z}$

⇦ عكسيا ، إذا كان : $z=92+420k$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

فإن : $z-8=28(3-15k)$ و $z-2=15(6-28k)$

إذن : $\begin{cases} z\equiv 8[28] \\ z\equiv 2[15] \end{cases}$.

و بالتالي ، فمجموعة حلول النظمة (S) في $\mathbb{Z}$ هي : $S=\{92+420k/k\in\mathbb{Z}\}$.

3)- إنبعاث الاشارة الصفراء يكون خلال المدة الزمنية (بالدقيقة) إنطلاقا من منتصف الليل ($0h$)

$d_J=2+28\alpha$ ، حيث $\alpha\in\mathbb{N}$.

و إنبعاث الاشارة الحمراء يكون خلال المدة الزمنية : $d_R=8+15\beta$ ، حيث $\beta\in\mathbb{N}$.

⇦ تتطابق إنبعاث الاشارتين معا خلال المدة الزمنية : $d=d_J=d_R$.

أي أن : d هو حل النظمة : $\begin{cases} d\equiv 8[28] \\ d\equiv 2[15] \end{cases}$ في المجموعة $\mathbb{N}$.

باستعمال نتيجة السؤال **2)**- ، نستنتج أن : $d=92+420k/k\in\mathbb{N}$.

أصغر مدة زمنية تتطابق فيها الاشارتين معا هي : $d=92\min$

و ذلك في اللحظة ذات التاريخ : $t_1=1h32\min$.

⇦ ما هو تاريخ اللحظة التي ستتطابق فيها إنبعاث الاشارتين الضوئيتين لثاني مرة ؟