الثانية باك علوم رياضية المدة: 4 ساعات 1/3	الامتحان التجريبي للامتحان الوطني **الرياضيات** مارس 2008	المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية أكاديمية جهة الدار البيضاء الكبرى نيابة عين الشق الثانوية التأهيلية الجسر الخاصة

التمرين الأول: (4 ن)

I - المستوى P منسوب إلى معلم متعامد و ممنظم مباشر $(o,\vec{u},\vec{v})$. لتكن Ω النقطة ذات اللحق i و m عدد حقيقي موجب قطعا. نعتبر التطبيق: $F_m : P/\{\Omega\} \to P$

$$M_{(z)} \mapsto M'_{(z')} \,/\, z' = \frac{m}{\overline{z}+i} + i$$

0.25   1- بين أن: $F_m(M) \neq \Omega \quad (\forall M \in P/\{\Omega\})$

0.25   2- بين أن: $(F_m \circ F_m)(M) = M \quad (\forall M \in P/\{\Omega\})$

0.5   3- حدد المجموعة $A = \{M \in P/\{\Omega\} / F_m(M) = M\}$

4- لتكن $M \in P/\{\Omega\}$. نضع: $F_m(M) = M'$

0.5   أ- بين أن النقط Ω ، M و M' مستقيمية.

0.25   ب- بين أن: $\overline{\Omega M}.\overline{\Omega M'} = m$

0.5   5- ليكن $r \in \mathbb{R}_+^*$ و (Γ) الدائرة التي مركزها Ω و شعاعها r. بين أن $F_m(\Gamma)$ دائرة، و حدد مركزها و شعاعها.

II - لتكن A و B و C و D أربع نقط مختلفة مثنى مثنى من $P/\{\Omega\}$ ألحاقها على التوالي: a ، b ، c ، d

نضع: $$(A,B,C,D) = \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)}$$

0.25   1- بين أن: $(A,B,C,D) = (C,D,A,B)$

0.5   2- بين أن (A,B,C,D) عدد حقيقي إذا و فقط إذا كان A ، B ، C ، D مستقيمية أو متداورة.

0.5   3- نضع: $F_m(A) = A'$ و $F_m(B) = B'$ و $F_m(C) = C'$ و $F_m(D) = D'$.

بين أن: $(A',B',C',D') = \overline{(A,B,C,D)}$

0.5   4- بين أن: A ، B ، A' ، B' متداورة أو مستقيمية.

التمرين الثاني: (2.5 ن)

نعتبر المجموعة: $E = \{M(a;b) = aI + bA / (a;b) \in \mathbb{R}^2\}$ حيث: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

0.25   1- أ- بين أن: $A^2 = A + 2I$

0.5   ب- استنتج أن A يقبل مقلوبا ينبغي تحديده.

0.5   2- بين أن: $A^n = u_n A + v_n I \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

3- نضع: $$\begin{cases} \alpha_{n+1} = 2u_{n+1} + v_{n+1} \\ \beta_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} \end{cases}$$

0.5   أ- حدد طبيعة المتتاليتين $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$

0.25   ب- أعط الحد العام للمتتاليتين $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

0.5   ج- استنتج A^n بدلالة n.

التمرين الثالث: (3.5 ن)

1- ليكن p عددا أوليا حيث: $p > 2$

0.25 ا- أثبت أن: $\forall k \in \{1,2,....,p-1\} : p / C_p^k$

0.5 ب- بين بالترجع أن: $\forall n \in \mathbb{N} : n^p \equiv n[p]$

2- نعتبر $\alpha \in \mathbb{N}$ حيث $\alpha \wedge p = 1$ نضع: $A = \{k \in \mathbb{N}^* / \alpha^k \equiv 1[p]\}$

0.25 أ- تحقق أن: $(p-1) \in A$ (يمكن استعمال السؤال 1-أ)

نرمز ب d لأصغر عناصر المجموعة A.

0.5 ب- ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ أثبت أنه إذا كان r باقي قسمة n على d فإن: $\alpha^n \equiv \alpha^r [p]$.

0.5 ج- استنتج أن: $\forall n \in A : d / n$

3- نعتبر العدد $u_n = \underbrace{111.......11}_{n\ \text{مرة}}$

0.25 أ- تحقق أن: $9u_n = 10^n - 1$

0.25 ب- أثبت أن: $10^6 \equiv 1[7]$

0.5 ج- أثبت أن: $6/n \Leftrightarrow 7/u_n$

0.5 د- استنتج أصغر مضاعف للعدد 7 و الذي يكتب في نظمة العدد العشري فقط بالرقم 1.

التمرين الرابع: (10ن)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 2.

نعتبر الدالتين f_n و g_n للمتغير الحقيقي x المعرفتين بما يلي:

$$\begin{cases} f_n(x) = 4^x - 2^{x+1} + 1 & ; x \le 0 \\ f_n(x) = \dfrac{x}{x^n - \ln(x)} & ; x > 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad g_n(x) = 1 + (1-n)x^n - \ln(x)$$

الجزء الأول:

0.5 1-أ- بين أن: $(\forall x > 0) : \quad x^n > \ln(x)$ ، ثم استنتج D حيز تعريف الدالة f_n.

0.25 ب- ادرس اتصال f_n على D.

0.75 ج- ادرس اشتقاق f_n عند $x_0 = 0$.

0.75 2- أ- ادرس تغيرات الدالة g_n.

0.5 ب- بين أنه يوجد عددا حقيقيا وحيدا a_n بحيث: $g_n(a_n) = 0$

0.5 ج- احسب $g_n(1)$ و $f_n(a_n)$

0.75 د- استنتج أن: $\sqrt[n]{\dfrac{1}{n}} < a_n < 1$ ثم احسب a_2.

1 3- أ- حدد نهايات f_n عند محدات D ، ثم استنتج الفروع اللانهائية ل C_{f_n}.

0.5 ب- ادرس تغيرات f_n .

ج- أنشئ C_{f_2} في معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$.	0.5
4- أ- بين أن g قصور f_n على المجال $]-\infty,0[$ تقابل من I نحو J ينبغي تحديده.	0.25
ب- احسب $g^{-1}(x)$ لكل x من J.	0.5
ج- حدد مساحة الحيز المحصور بين C_g و محور الأفاصيل و المستقيمين الذين معادلتاهما: $x=-2$ و $x=-1$	0.5
<u>الجزء الثاني:</u>	
1- بين أن: $\forall x\in[1,3]:\quad \left\|f_1'(x)\right\|\le 1$	0.5
2- ليكن α و β عددين حقيقيين من $[1,3]$ بحيث: $\alpha\le\beta$.	
نضع: $A=\int_\alpha^\beta f_1(x)dx$ و $B=\int_\alpha^\beta f_1(x_1)\,dx$	
أ- باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية بين أن: $\forall x\in[\alpha,\beta]:\quad \alpha-x\le f_1(x)-f_1(\alpha)\le x-\alpha$	0.5
ب- استنتج أن: $\left(\forall(\alpha,\beta)\in[1,3]^2\right):\quad \|A-B\|\le\frac{1}{2}(\alpha-\beta)^2$	0.5
3- نعتبرالأعداد $x_0,x_1,.....,x_n$ من $[1,3]$ بحيث: $x_0=1$ و $\left(\forall k\in\{1,....,n\}\right): x_k=x_0+k\times\frac{2}{n}$	
نضع: $A_k=\int_{x_k}^{x_{k+1}} f_1(x)dx$ و $B_k=\int_{x_k}^{x_{k+1}} f_1(x_k)\,dx$ و $S_n=\sum_{k=0}^{n}B_k$	
أ- بين أن: $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right):\quad \left\|\int_1^3 f_1(x)dx-S_n\right\|\le\frac{2}{n}$	0.75
ب- احسب: $\lim_{n\to+\infty}S_n$.	0.5