

المادة : الرياضيات

مدة الإنجاز : 3 ساعات

7

المعامل :

الشعبة : شعبة العلوم التجريبية :مسلك علوم الحياة والأرض +مسلك العلوم الفيزيائية

التمرين الأول (نقطتان ونصف)سلم
التقييم

$$1. \text{ أ - تحقق أن : } \frac{x^2}{x+1} = x-1 + \frac{1}{x+1} \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

0.5

$$\text{ب - بين أن : } \int_0^2 \frac{x^2}{x+1} dx = \ln 3$$

1

$$2. \text{ باستعمال الكاملة بالأجزاء بين أن : } \int_0^2 x \ln(x+1) dx = \frac{3}{2} \ln 3$$

1

التمرين الثاني (4 نقط)

لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة بما يلي : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{2u_n + 3}$ لكل n من \mathbb{N}

$$1. \text{ بين بالترجع أن : } u_n > 1 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

0.5

$$2. \text{ أ - بين أن : } u_{n+1} - u_n = \frac{2(1-u_n)(1+u_n)}{2u_n+3} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{ثم استنتج أن : } (u_n) \text{ متتالية تناقصية.}$$

1

$$\text{ب - استنتج أن المتتالية } (u_n) \text{ متقاربة ثم حدد } \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n$$

1

$$3. \text{ نضع لكل } n \text{ من } \mathbb{N} : v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$$

أ - بين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية محددًا أساسها وحدها الأول .

0.5

ب- استنتج v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n

0.5

$$\text{ج - احسب : } \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n$$

0.5

التمرين الثالث (4 نقط)

$$1. \text{ حل في } \mathbb{C} \text{ المعادلة : } z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$$

0.5

$$2. \text{ نعتبر في } \mathbb{C} \text{ الحدودية : } P(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + \sqrt{3}i)z - 8i$$

0.25

$$\text{أ - تحقق من أن : } z_0 = 2i \text{ حلا للمعادلة } P(z) = 0$$

$$\text{ب - حدد الأعداد الحقيقية } a \text{ و } b \text{ و } c \text{ بحيث : } P(z) = (z - 2i)(az^2 + bz + c)$$

0.5

$$\text{ج - استنتج حلول المعادلة : } P(z) = 0$$

0.25

3. نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى المعلم $(O; \vec{U}; \vec{V})$ النقط : $A(\sqrt{3} - i)$

$$\text{و } B(\sqrt{3} + i) \text{ و } C(2i) \text{ والدوران } R\left(O; \frac{\pi}{3}\right) \text{ الذي مركزه } O \text{ وزاويته } \frac{\pi}{3} .$$

1

$$\text{أ - اكتب على الشكل المثلي الأعداد : } Z_A \text{ و } Z_B \text{ و } Z_C \text{ و } \frac{Z_C}{Z_B}$$

ب - بين أن التمثيل العقدي للدواران $R\left(O; \frac{\pi}{3}\right)$ هو : $Z' = e^{j\frac{\pi}{3}} Z$. 0.5

ج - بين أن : $R(A) = B$ و $R(B) = C$ 0.5

د - استنتج أن الرباعي : $OABC$ معين . 0.5

مسألة : (9 نقط ونصف)

I (لتكن g الدالة العددية المعرفة على : $]0; +\infty[$ ب : $g(x) = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1} + 1$)

1 . بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$ و $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = +\infty$ 0.5

2 . بين أن : $g'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}$ لكل x من $]0; +\infty[$ ؛ وأعط جدول تغيرات الدالة g على $]0; +\infty[$ 0.5

3 . استنتج أن : $g(x) > 0$ ؛ $\forall x \in]0; +\infty[$ 0.5

II (لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي : $f(x) = x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x + 1$ ؛ $x > 0$; $f(x) = (1-x)e^x$ ؛ $x \leq 0$)

وليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ($\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$)

1 . أ - بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = 1$ ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. لاحظ أن : $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$ 0.5

ب - حدد : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ وأول النتيجة هندسيا . 0.5

ج - بين أن f متصلة في $x_0 = 0$ 0.5

2 . ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين وعلى اليسار في 0 . ثم أول النتيجة هندسيا . 1.5

3 . أ - بين أن : $f'(x) = g(x)$ ؛ $\forall x \in]0; +\infty[$ وأن : $f'(x) = -xe^x$ ؛ $\forall x \in]-\infty; 0[$ 0.75

ب - أعط جدول تغيرات الدالة f . 0.25

4 . بين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف في نقطة أفصولها سالب . 0.5

5 . بين أن المستقيم ذا المعادلة $y = x + 2$: (T) مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ 0.5

6 . أنشئ المنحنى (C_f) والمستقيم (T) 1

نأخذ : $\ln 2 \approx 0,7$ ؛ $\ln 3 \approx 1,1$ ؛ $e^{-1} \approx 0,37$ ؛ $e^{-2} \approx 0,14$ ؛ $e^{-3} \approx 0,05$

7 . احسب $A(\Delta)$ مساحة الحيز Δ المحصور بين (C_f) والمستقيم ذا المعادلة $x = -1$ 0.5

والمستقيم ذا المعادلة $x = 0$ ومحور الأفاصل .

III (1 . بين أن الدالة h ، قصور الدالة f على المجال $] -\infty; 0[$ ؛ تقبل دالة عكسية معرفة على 0.5

مجال J يجب تحديده .

2 . احسب : $(h^{-1})'\left(\frac{3}{e^2}\right)$. (لاحظ أن : $h(-2) = \frac{3}{e^2}$) 0.5

3 . أنشئ $(C_{h^{-1}})$ في نفس المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ 0.5