المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي

نيابة مقاطعة الحي الحسني
الدار البيضاء
الأستاذ : هدار

الامتحان التجريبي المقترح للبكالوريا
دورة ماي 2011
الثانوية التأهيلية ابن الياسمين
شعبة العلوم الرياضية (أ) و(ب)

مدة الإنجاز : 4h
المعامل : 9

$1/3$

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة الغير مبرمجة

التمرين الأول : (3.75 ن)

نذكرأن $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

ليكن a عددا حقيقيا موجبا قطعا.

لكل x من $\mathbb{R}$ ، نرمز ب $A(x)$ للمصفوفة المربعة التالية: $A(x)=\begin{pmatrix}a^x&-xa^x\\0&a^x\end{pmatrix}$ و لتكن المجموعة:

$$E=\left\{A(x)\,/\,x\in\mathbb{R}\right\}$$

1) أ- بين أن E جزء مستقر من $\left(M_2(\mathbb{R}),\times\right)$ و أن $\times$ تبادلي في E . 0.5

ب- بين أن التطبيق : $\begin{array}{rcl}f:\mathbb{R}&\to&E\\x&\mapsto&A(x)\end{array}$ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R},+)$ نحو $(E,\times)$. 0.5

ج- استنتج بنية $(E,\times)$. 0.5

2) نعتبر المجموعة التالية: $F=\left\{A(n)\,/\,n\in\mathbb{Z}\right\}$.

بين أن $(F,\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(E,\times)$. 0.5

3) لكل n من $\mathbb{N}$ و لكل x من $\mathbb{R}$ نضع: $A^0(x)=I$ و $A^{n+1}(x)=A^n(x)\times A(x)$.

نرمزب $A^{-n}(x)$ لمقلوب المصفوفة $A^n(x)$ في $(E,\times)$.

أ- بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall p\in\mathbb{Z})\quad A^p(x)=A(px)$. 0.5

ب- ليكن (α,β) من $\mathbb{Z}^2$. نعتبر المجموعة: $G=\left\{A^p(\alpha)\times A^q(\beta)\,/\,(p,q)\in\mathbb{Z}^2\right\}$.

بين أن $(G,\times)$ زمرة تبادلية. 0.5

ج- بين أن: $F=G \iff \alpha\wedge\beta=1$. 0.75

التمرين الثاني : (3.25ن)

ليكن m عددا عقديا غير منعدم.

I) نعتبر المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(E):z^2-\left(m+\overline{m}\right)z+|m-i|^2=0$

($\overline{m}$ هو مرافق m و $|m-i|$ هو معيار $m-i$)

-1 بين أن مميز المعادلة (E) هو : $\Delta=\left(m-\overline{m}-2i\right)^2$. 0.5

-2 استنتج مجموعة حلول المعادلة (E). 0.5

II) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ ، نعتبر النقط A و B و C و D التي ألحاقها على التوالي: m و $\overline{m}$ و $m-i$ و $\overline{m}+i$.

-1 بين أن النقط A و B و C و D مستقيمية. 0.75

2- نعتبر الدوران R_1 الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{4}$ و نعتبر الدوران R_2 الذي مركزه B و زاويته $-\frac{3\pi}{4}$ و لتكن النقط M و M' و M'' التي ألحاقها على التوالي: z و z' و z'' **بحيث** $R_1(M)=M'$ **و** $R_2(M)=M''$ **.**

0.75 أ- بين أن: $\frac{z'-z}{z''-z}=-i\frac{z-m}{z-m}\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

0.75 ب- حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث تكون النقط M و M' و M'' مستقيمية.

التمرين الثالث : (3ن)

لكل عدد صحيح k ، نضع: $n=p_1p_2p_3.......p_k$ حيث p_1 و p_2 و................ p_k أعداد أولية موجبة مختلفة مثنى مثنى و $p_i-1/n-1$ لكل i من المجموعة $I_k=\{1,2,......k\}$.

ليكن a عددا صحيحا نسبيا بحيث $a\wedge n=1$.

0.5 1) بين أن: $a\wedge p_i=1 \quad (\forall i\in I_k)$.

0.5 2) استنتج أن: $a^{p_i-1}\equiv 1[p_i] \quad (\forall i\in I_k)$.

0.5 3) أ- بين أن: $a^{n-1}\equiv 1[p_i] \quad (\forall i\in I_k)$.

0.5 ب- استنتج أن: $a^{n-1}\equiv 1[n]$

1 4) باستعمال ما سبق، بين أنه إذا كان a و 561 عددين أولين فيما بينهما فإن: $a^{560}\equiv 1[561]$.

التمرين الرابع : (10 ن)

الجزء الأول:

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بمايلي: $f(x)=(x+1)e^{-x}$

0.5 1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

0.5 ب- أدرس تغيرات الدالة f .

0.5 ج- استنتج أن: $0\le xe^{-x}\le 1 \quad (\forall x\in[0,+\infty[)$ و $f(2x)-f(x)\prec 0 \quad (\forall x\in]0,+\infty[)$.

0.5 2) أ- تحقق أن: $1-u\le\frac{1}{1+u}\le 1-\frac{1}{2}u \quad (\forall u\in[0,1])$.

0.5 ب- استنتج أن: $1-te^{-t}\le\frac{1}{1+te^{-t}}\le 1-\frac{1}{2}te^{-t} \quad (\forall t\in[0,+\infty[)$

الجزء الثاني:

لتكن F الدالة المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بمايلي: $F(x)=\int_x^{2x}\frac{1}{1+te^{-t}}\,dt$ و ليكن (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- بين أن: $\left(\forall x\in[0,+\infty[\right) \quad x+f(2x)-f(x)\leq F(x)\leq x+\frac{1}{2}\left(f(2x)-f(x)\right)$ — 0.75

ب- استنتج أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$ و أن المنحنى (C) يقبل مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y=x$ بجوار $+\infty$. — 0.75

ج- ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (Δ) على المجال $]0,+\infty[$. — 0.25

د- بين أن F قابلة للإشتقاق على اليمين في 0 و أن $F_d^{'}(0)=1$. — 0.5

2) أ- بين أن الدالة : $t\to\dfrac{1}{1+te^{-t}}$ تقبل دالة أصلية G على المجال $[0,+\infty[$ — 0.25

ب- تحقق أن: $\left(\forall x\in[0,+\infty[\right) \quad F(x)=G(2x)-G(x)$. — 0.25

ج- استنتج أن F قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ وأن: $(\forall x\succ 0)\ F^{'}(x)=\dfrac{e^{2x}+2x\left(e^{x}-1\right)}{\left(e^{2x}+2x\right)\left(1+xe^{-x}\right)}$ — 0.75

د- أعط جدول تغيرات الدالة F . — 0.5

3) أنشئ المنحنى (C) . — 0.5

4) لتكن S مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى (C) و المستقيم (Δ) و المستقيمين المعرفين على التوالي بالمعادلتين $x=0$ و $x=1$.

بين أن: $0\leq S\leq\dfrac{1}{4}$ (يمكنك استعمال نتيجة السؤال 1- ج من الجزء الأول). — 0.5

<u>الجزء الثالث:</u>

1) لكل n من $\mathbb{N}^*$ ؛ نعتبر المعادلة : $F(x)=\dfrac{1}{n} \quad (E_n)$.

أ- بين أن المعادلة (E_n) تقبل حلا وحيدا α_n في المجال $]0,+\infty[$. — 0.5

ب- بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq1}$ تناقصية و استنتج أنها متقاربة. — 0.5

ج- بين أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=0$. — 0.5

2) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بمايلي: $u_n=\displaystyle\int_0^{\alpha_n}F(t)\,dt \quad \left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$.

أ- بين أن: $u_n=\alpha_nF(c_n) \quad \left(\exists c_n\in[0,\alpha_n]\right)$ — 0.5

ب- بين أن المتتالية (u_n) متقاربة و حدد نهايتها. — 0.5