



المادة : الرياضيات	الامتحان التجريبي الموحد للبيكالوريا دورة ماي 2010	المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والشؤون الجامعية قطاع التعليم المدرسي	 الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين جهة سوس ماسة درعة النيابة الإقليمية لورزازات	
العلوم : الرياضيات				
الشعبة : الرياضيات (أ) و (ب)				
المعامل : 9				
مدة الانجاز : 4 ساعات				

التمرين الأول : (3 نقط)

3 ن

نضع $\mathcal{E} = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ ونعرف على \mathcal{E} قانون التركيب الداخلي * المعرف كما يلي :

$$\cdot (x, y) * (x', y') = \left(xx', \frac{y'}{x} + x'y \right) : \mathcal{E} \text{ من } (x', y') \text{ و } (x, y)$$

1. بين أن $(\mathcal{E}, *)$ زمرة . هل $(\mathcal{E}, *)$ زمرة تبادلية ؟

1

2. لتكن f دالة عددية معرفة على \mathbb{R}^* . نضع : $\Gamma(f) = \left\{ (x, f(x)) / x \in \mathbb{R}^* \right\}$

أ- بين أن $\Gamma(f)$ يكون جزءا مستقرا في $(\mathcal{E}, *)$ إذا وفقط إذا كان :

0,5

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*, f(xy) = \frac{1}{x} f(y) + y f(x)$$

ب- لتكن الدالة العددية f_k المعرفة بما يلي : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f_k(x) = k \left(x - \frac{1}{x} \right)$

0,25

بين أن $(\Gamma(f_k), *)$ زمرة جزئية من $(\mathcal{E}, *)$.

ج- بين أنه إذا كان $\Gamma(f)$ جزءا مستقرا من $(\mathcal{E}, *)$ ، فإن لكل (x, y) من $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ ، لدينا :

0,25

$$\cdot \left(y - \frac{1}{y} \right) f(x) = \left(x - \frac{1}{x} \right) f(y)$$

د- بين أن $(\Gamma(f), *)$ زمرة جزئية من الزمرة $(\mathcal{E}, *)$ إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي k بحيث $f = f_k$.

1

التمرين الثاني : (4 نقط)

المستوى العقدي \mathcal{P} منسوب إلى معلم متعامد ممنظم (O, \bar{u}, \bar{v}) . ليكن g التطبيق المعرف من $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ نحو \mathbb{C} بما يلي :

$$g(z) = \frac{iz^2}{z-1}$$

1. نضع $u = i \tan(\theta)$ حيث $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. حدد عمدة ومعيار $g(u)$ بدلالة θ . 0,25

2. أ- حدد الجذرين المربعين للعدد العقدي $1 - 4\sqrt{3}i$. 0,25

ب- حل في \mathbb{C} المعادلة $g(z) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (1). ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (1) بحيث $|z_1| = 1$. 0,25

ج- أكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي ثم تحقق من أن : $z_1^6 - 27z_2^6 = 2$. 0,75

3. أ- بين أن : $|z|^2 = 2\Re(z)$ أو $z = \bar{z} \Leftrightarrow g(z) \in i\mathbb{R}$ ، ثم حدد E مجموعة النقط $M(z)$ بحيث 0,5

$$g(z) \in i\mathbb{R}$$

ب- حدد F مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $|g(z)| = |z|$. 0,25

4. لتكن A و B على التوالي صورتَي العددين العقديين $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ و $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i$.

أ- حدد $z_{B'}$ لحق النقطة B' صورة النقطة B بالتحاكي h الذي مركزه O ونسبته $\sqrt{3}$. 0,25

ب- بين أن $R(A) = B'$ حيث R هو الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{5\pi}{6}$. 0,25

ج- حدد الكتابة العقديّة للتحويلين R و h ، ثم استنتج الكتابة العقديّة للتحويل $F = R \circ h$. 0,75

د- حدد معادلة ديكارتية للمستقيم $(D)'$ صورة المستقيم (D) ذو المعادلة $y = \sqrt{3}x$ بالتحويل F . 0,5

التمرين الثالث : (3 نقط)

1. ليكن p عددا أوليا.

1. أ- نفترض أن $p \geq 5$. بين أن $p^2 \equiv 1 [3]$ و أن $2^p \equiv 2 [3]$ ، ثم استنتج أن العدد $p^2 + 2^p$ ليس أوليا. 0,5

ب- بين أنه إذا كان $p^2 + 2^p$ أوليا، فإن : $p = 3$. 0,25

2. بين أنه إذا كان p يقسم $2^p + 1$ فإن $p = 3$. 0,25

3. أ- تحقق من أنه لكل n من \mathbb{N}^* ، لدينا : $(2n^2 + n)^2 \leq 4(1 + n + n^2 + n^3 + n^4) \leq (2n^2 + n + 2)^2$. 0,25

ب- بين أنه إذا كان مجموع القواسم الصحيحة الطبيعية للعدد p^4 مربعا كاملا ، فإن $p = 3$.

0,5

|| نعتبر في المجموعة \mathbb{Z}^2 المعادلة التالية : $(E): 324x - 245y = 7$.

1. بين أنه إذا كان (x, y) حلا للمعادلة (E) ، فإن x مضاعف للعدد 7 .

0,25

2. حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة (E) .

0,5

مسألة : (10 نقط)

10

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$. نعتبر f_n الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :

$$\begin{cases} f_n(x) = xe^{-\frac{n}{x}} & ; x \neq 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

وليكن \mathcal{E}_n المنحنى الممثل للدالة f_n في المستوى \mathcal{P} المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. أ- بين أن f_n متصلة على اليمين في النقطة 0 .

0,25

ب- بين أن f_n قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 ، ثم أول هندسيا النتيجة المحصلة .

0,25

ج- أحسب نهايات الدالة f_n عند $+\infty$ وعند $-\infty$ و على اليسار في 0 .

0,5

2. بين أن f_n قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]0, +\infty[$ و $]-\infty, 0[$ ، ثم أحسب $f_n'(x)$ لكل $x \in \mathbb{R}^*$ ، ثم

0,5

ضع جدول تغيرات الدالة f_n .

3. أ- بين أن \mathcal{E}_n يقبل مقاربا مانلا \mathcal{E}_n بجوار $+\infty$ ، وجوار $-\infty$ محددًا معادلة ديكارتية له .

0,5

ب- أنشئ المنحنى \mathcal{E}_1 .

0,5

4. أ- بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* , \exists ! u_n \in \mathbb{R} / f_n(u_n) = 1$.

0,5

ب- بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n > 1$.

0,25

ج- بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* : f_n(u_{n+1}) = e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$. (يمكن ملاحظة أن : $f_{n+1}(u_{n+1}) = 1$) ، ثم استنتج رتبة

0,5

المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 1}$.

5. أ- بين أن لكل $n \in \mathbb{N}^*$ ، العدد الحقيقي u_n حل للمعادلة $x \ln(x) = n$: (*) .

0,25

ب- لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]1, +\infty[$ بما يلي : $g(x) = x \ln(x)$. بين أن g تقابل من المجال

0,25

$]1, +\infty[$ نحو مجال J ينبغي تحديده .

ج- أعط جدول تغيرات الدالة g^{-1} .

0,25

د- بين أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

0,25

|| لتكن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = f_1(v_n) ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. بين أن $f_1([0,1]) \subset [0,1]$. ماذا يمكن أن تستنتج بالنسبة للمتتالية العددية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ؟

0,25
0,25

2. أدرس رتبة المتتالية العددية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

0,5

3. بين أن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة ، ثم حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

0,25
0,25

||| لتكن F الدالة العددية المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} F(x) = \int_x^{2x} f_n(t) dt ; x > 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$$

1. أ- بين أن : $0 < t e^{-t} < 1$: $\forall t \in]0, +\infty[$.

0,25

ب- استنتج أن F متصلة على اليمين في 0 .

0,5

2. بين أن F قابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$ ، ثم حدد $F'(x)$ لكل $x > 0$.

0,5

3. بين أن : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{F(x)}{x} = 0$.

0,25

4. أ- بين أن : $e^t \geq t + 1$: $\forall t \in \mathbb{R}$.

0,5

ب- استنتج أن : $F(x) \geq -n x + \frac{3}{2} x^2$: $\forall x \geq 0$.

0,5

ج- استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

0,25

د- حدد الفرع اللانهائي للمنحنى \mathcal{C}_F بجوار $+\infty$.

0,25

5. أ- ضع جدول تغيرات الدالة F .

0,25

ب- أنشئ \mathcal{C}_F .

0,5