المادة : الرياضيات الشعبة: شعبة العلوم الرياضية (أ) مدة الإنجاز : 4 س	الامتحان التجريبي للسنة الثانية بكالوريا 2010 - 2009	المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي الأكاديمية الجهوية للتربية و التكوين جهة طنجة- تطوان نيابة المضيق الفنيدق

التمرين الأول (3 ن)

$M_2(\mathbb{R})$ هي مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2.

نذكر أن $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

نضع : $M(a,b)=\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}$ لكل (a,b) من $\mathbb{R}^2$ ونعتبر المجموعة: $E=\{M(a,b)/a^2+b^2=1\}$

0,25 — 1) أ- تحقق أن $\forall(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4,\quad M(a,b)\times M(c,d)=M(ac-bd,ad+bc)$

0,5 — ب- بين أن $(E,\times)$ جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

2) لتكن U مجموعة الأعداد العقدية التي معيارها 1 (نذكر أن $(U,\times)$ زمرة تبادلية)

وليكن f التطبيق المعرف بما يلي :

$$\begin{aligned}f:\ & U\to E\\ & a+ib\mapsto M(a,b)\end{aligned}$$

0,5 — أ - بين أن f تشاكل تقابلي من $(U,\times)$ نحو $(E,\times)$

0,5 — ب- استنتج أن $(E,\times)$ زمرة تبادلية

0,5 — 3) نضع : $A=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt3}{2}\\-\frac{\sqrt3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ أكتب A^n بدلالة n حيث $n\in\mathbb{N}^*$

0,75 — 4) حل المعادلة : $X\in E,\quad X^4=A$

التمرين الثاني (3,5 ن)

ليكن n من $\mathbb{N}^*$

0,75 — 1) بين أن n^2+1 ليس مربعا كاملا

0,25 — 2) أ- تحقق أن $n^2+1=(n+1)^2-2(n+1)+2$

0,5 — ب- استنتج $(n^2+1)\wedge(n+1)$ حسب قيم n

3) a و b عددان طبيعيان بحيث $a\wedge b=1$ و $(n+1)a^2=(n^2+1)b$

1 — أ- بين أن $a^2\wedge b=1$ ثم أن $(n^2+1)\wedge(n+1)=2$

1 — ب - استنتج أن $a^2=b^2+(b-1)^2$

التمرين الثالث (3,5 ن)

نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$ النقطتين A و B

اللتين لحقيها على التوالي 4 و $4i$ و نرمز z_M للحق النقطة M.

1) لتكن النقطة C بحيث $z_C = re^{i\theta}$ مع $r \in \mathbb{R}_+^*$ و $\theta \in [0,2\pi[$

أكتب z_D بدلالة r و θ حيث D هي صورة C بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$ — 0,5

2) النقط P و Q و R و S هي على التوالي منتصفات $[AB]$ و $[BC]$ و $[CD]$ و $[AD]$

أ- بين أن الرباعي $PQRS$ متوازي أضلاع — 0,5

ب- حدد معيار وعمدة العدد العقدي $z = \dfrac{z_Q - z_P}{z_Q - z_R}$ — 1

ج- استنتج أن $PQRS$ مربع وحدد مساحته بدلالة r و θ — 0,5

د- نفترض أن r ثابت ، ماهي قيمة θ التي تكون من أجلها مساحة المربع $PQRS$ قصوية؟ — 1

مسألة (10 ن)

I – لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $g(x) = (2-x)e^x - 2$

1) حدد $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ — 0,5

2) أدرس تغيرات الدالة g — 0,5

II- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{e^x - 1} & , x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f نسبة لمعلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أ- حدد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ — 0,75

ب- أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) — 0,5

2) أ- بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق في الصفر — 0,5

ب- بين أن $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{\left(e^x - 1\right)^2}$ لكل x من $\mathbb{R}^*$ — 0,5

ج- بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد a من $]1,2[$ بحيث $f'(a) = 0$ ثم تحقق أن $f(a) = a(2-a)$ — 0,75

3) أدرس تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$ ثم انشئ المنحنى (C_f) (نأخذ $a \simeq 1,6$) — 1

III- نضع: $\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad F(x)=\int_0^x f(t)dt$

1) حل المتراجحة $t \in \mathbb{R}, \quad f(t) \le 2t^2e^{-t}$ — 0,25

2) نضع: $\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad G(x)=\int_{\ln 2}^x t^2e^{-t}dt$ — 0,75

باستعمال مكاملة بالأجزاء مرتين أحسب $G(x)$ ثم حدد $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x)$

3) أ- استنتج أن F محدودة على $\mathbb{R}^+$ — 0,25

ب- بين أن F تزايدية على $\mathbb{R}^+$ — 0,25

4) بين أن $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \le \int_0^x f(t)e^{-nt}dt \le \dfrac{a(2-a)}{n}$ — 0,5

5) $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad I_k(x)=\int_0^x t^2e^{-kt}dt$ — 0,75

أحسب $I_k(x)$ ثم حدد $\lim\limits_{x\to+\infty} I_k(x)$

6) أ- تحقق أن $\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{1}{e^x-1}=\sum_{k=1}^{n} e^{-kx}+\dfrac{e^{-nx}}{e^x-1}$ — 0,5

ب- استنتج أن $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^x f(t)e^{-nt}dt = F(x)-\sum_{k=1}^{n} I_k(x)$ — 0,25

ج- نقبل أن للدالة F نهاية منتهية عند $+\infty$ — 0,5

بين أن الدالة : $x \mapsto \int_0^x f(t)e^{-nt}dt$ تقبل نهاية عندما تؤول x إلى $+\infty$

7) نضع : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)e^{-nt}dt = l_n$ — 1

بين أن $l-l_n = 2\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^3}$ ثم استنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^3}=\dfrac{l}{2}$