نيابة القنيطرة	الامتحان التجريبي للباكالوريا (2011)	ثانوية عبد الرحمان الناصر

المادة	الرياضيات	المعامل	9
الشعبة	العلوم الرياضية	مدة الإنجاز	4س

التمرين الأول : (3,5ن)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر في C المعادلة التالية : $(E): z^2 - az + (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 0$. حيث a عدد عقدي .

ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) . ولتكن النقط A, M_1, M_2 صور a و z_1 و z_2 على التوالي

I – بين أن : $\begin{cases} \arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \\ |z_1||z_2| = 1 \end{cases}$. 1

II – 1- نضع : $z_1 = e^{i\theta}$. حيث θ عدد حقيقي 0.5

أ- استنتج بدلالة θ الشكل المثلثي للعدد العقدي z_2

ب- بين أن : $a = 2\cos(\theta - \frac{\pi}{6})e^{i\frac{\pi}{6}}$ 0.5

2 – نفترض أن : $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

ونعتبر في المستوى التحويل F المرتبط بالتطبيق f المعرف من $\mathbb{C}$ نحو $\mathbb{C}$ بمايلي :

$f(z) = (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)z$.

أ- حدد طبيعة وعناصر التحويل F . 0.5

ب- بين أن : $F(M_1) = M_2$ 0.5

ج- استنتج طبيعة الرباعي OM_1AM_2 . 0.5

التمرين الثاني : (3ن)

1- بين أن العدد 251 قاسم أولي للعدد 2008 0.25

2- نعتبر في Z^2 المعادلة : $(E): \quad 2008x + 120y = 8$

أ- بين أن المعادلة (E) تقبل حلا في $\mathbb{Z}^2$ 0.25

ب- حدد مجموعة حلول المعادلة (E) 0.5

3- نضع : $u_n = \underbrace{888......88}_{n \text{ مرة}} \qquad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

أ- بين أن : $u_n = \frac{8}{9}(10^n - 1) \qquad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$ 0.5

ب- بين أن : $10^n \equiv 1\,[251] \Leftrightarrow u_n \equiv 0\,[2008] \qquad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$ 0.5

ج- بين أن : $10^k \equiv 1\,[251] \quad (\exists k \in \mathbb{N})$. 0.5

د- استنتج أن العدد 2008 يقبل مضاعفا يكتب في نظمة العد العشري فقط بالرقم 8 0.5

9	المعامل	الرياضيات	المادة
4س	مدة الإنجاز	العلوم الرياضية	الشعبة

التمرين الثالث : (3,5ن)

لتكن $\mathbb{M}_2(IR)$ مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة الثانية .

نضع : $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ و $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

نعتبر المجموعة : $E=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix}a&b\\-2b&a+2b\end{pmatrix}/(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

1- بين أن $(E,+)$ زمرة تبادلية .	0.5
2 – بين أن $(E,\times)$ جزء مستقر من $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.	0.5
3- بين أن $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية و واحدية .	0.5
4- نعتبر التطبيق f المعرف بما يلي : $\begin{array}{l} f:E\to C\\ M(a,b)\mapsto a+b+ib\end{array}$	
أ- بين أن f تشاكل تقابلي من $(E,\times)$ نحو $(C,\times)$.	0.5
ب- بين أن كل مصفوفة $M(a,b)$ من $E-\{O\}$ تقبل مقلوبا في $E-\{O\}$ وحدده .	0.5
ج- استنتج بنية $(E,+,\times)$.	0.25
د بين أن : $(M(0,1))^n=M\left(-2^{\frac{n+1}{2}}\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{4}\right),2^{\frac{n}{2}}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)$: $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$.	0.75

التمرين الرابع : (10ن)

I – نعتبر الدالة العددية φ المعرفة على IR بما يلي : $\varphi(x)=(2-x)e^x-2$

1- أحسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$.	0.5
2 – أدرس تغيرات الدالة φ ثم ضع جدول تغيراتها .	0.5
3 - بين أن المعادلة : $\varphi(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α ينتمي إلى المجال $]1,+\infty[$ و أن : $1,59<\alpha<1,60$	0.5

II- نعتبر الدالة f المعرفة على IR بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2}{e^x-1} & ; \ x\neq 0\\ f(0)=0 \end{cases}$$

وليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$. $(\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm)$

1- أدرس اتصل الدالة f في $x_0=0$.	0.25
2- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ ثم احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.	0.5

3- أ- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في $x_0=0$.	0.25
ب- بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على IR^* و أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\quad f'(x)=\dfrac{x\varphi(x)}{(e^x-1)^2}$	0.5
ج- بين أن : $f(\alpha)=\alpha(2-\alpha)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f .	0.5
4 – أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) .	0.5
5- أنشىء المنحنى (C_f) .	0.5
III– لكل x من IR^+ , نضع : $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ و $G(x)=\int_0^x t^2e^{-t}\,dt$	
1- أحسب $G(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}G(x)$.	0.75
2- بين أن F تزايدية على $\mathbb{R}^+$.	0.25
3- أ- بين أن : $(\forall t\in[\ln 2,+\infty[)\quad f(t)\le 2t^2e^{-t}$	0.5
ب- استنتج أن F مكبورة على $\mathbb{R}^+$.	0.5
نقبل أن الدالة F تقبل نهاية عند $(+\infty)$ ونضع $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=L$ حيث $L\in\mathbb{R}$.	
IV- 1- أ- بين أن : $\dfrac{1}{e^x-1}=\dfrac{e^{-nx}}{e^x-1}+\sum_{p=1}^{n}e^{-px}$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)(\forall x\in\mathbb{R}^*)$.	0.5
ب- بين أن : $0\le\int_0^x f(t)e^{-nt}\,dt\le\dfrac{\alpha(2-\alpha)}{n}$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)(\forall x\in\mathbb{R}^+)$.	0.25
ج- باستعمل مكاملة بالأجزاء , أحسب : $I_n(x)=\int_0^x t^2e^{-nt}\,dt$ لكل $n\in\mathbb{N}^*$.	0.5
د- حدد $\lim\limits_{x\to+\infty}I_n(x)$.	0.25
2- أ- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)(\forall x\in\mathbb{R}^+)\quad \int_0^x f(t)e^{-nt}\,dt=F(x)-\sum_{p=1}^{n}I_p(x)$	0.5
ب- استنتج أن الدالة $x\mapsto\int_0^x f(t)e^{-nt}\,dt$ تقبل نهاية عند $(+\infty)$ لكل $n\in\mathbb{N}^*$.	0.25
ج- لكل $n\in\mathbb{N}^*$ نضع $L_n=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)e^{-nt}\,dt$. بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad L-L_n=2\left(1+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{3^3}+....+\dfrac{1}{n^3}\right)$	0.5
د- باستعمل (IV - 1 - ب) بين أن المتتالية $(L_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة .	0.25
ه- نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad u_n=1+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{3^3}+....+\dfrac{1}{n^3}$ بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة و أن نهايتها هي : $L'=\dfrac{L}{2}$.	0.5