2 بالـك علوم رياضية	تجريبي مادة الرياضيات	الأكاديمية الجهوية للتربية و التكوين
المعامل : 09	دورة ماي 2011/2010	جهة الرباط سلا زمور زعير – نيابة الخميسات
مدة الإنجاز : 04 ساعات		منــارة الـفـردوس

■ **التمرين رقم 01**: $\left(04pts\right)$

في كل ما يلي المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد و ممنظم $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

و الجزءان **الأول** و **الثاني** غير مرتبطين فيما بينهما .

⇦ **الجزء الأول**: $\left(02pts\right)$

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$\left(\mathrm{E}_{\theta}\right): z^2-2iz-\left(1+e^{2i\theta}\right)=0 \text{ ، حيث } \theta\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[.$$

1)- ليكن $\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2$ ، بين أن :

$$e^{ix}+e^{iy}=2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)} \text{ و } e^{ix}-e^{iy}=2i\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)} .$$

2)- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $\left(\mathrm{E}_{\theta}\right)$ ، ثم أكتب الحلين z_1 و z_2 على شكليهما الأسي .

3)- لتكن A و B النقطتين اللتين لحقاهما على التوالي z_1 و z_2 .

أ- بين أن النقط O و A و B غير مستقيمية و أن المثلث OAB قائم الزاوية .

ب- ما هي قيمة البارامتر الحقيقي θ التي من أجلها يكون المثلث OAB متساوي الساقين ؟

⇦ **الجزء الثاني**: $\left(02pts\right)$

نعتبر النقطتين A و B اللتين لحقاهما على التوالي a و $b+i$ حيث $\left(a,b\right)\in\mathbb{R}^2$.

و ليكن r الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{3}$ و النقطة B' هي صورة B بالدوران r .

1)- أعط الكتابة العقدية للدوران r ، ثم أحسب $aff\left(B'\right)$ بدلالة a و b .

2)- بين أن : $a+b=\sqrt{3} \Leftrightarrow B'\in\left(Oy\right)$ ، ثم عبر في هذه الحالة عن $aff\left(B'\right)$ بدلالة a .

3)- نفترض فيما يلي أن : $a=\sqrt{3}$ و $b=0$.

و لتكن C و D النقطتين اللتين لحقاهما على التوالي : $c=-i$ و $d=2+\sqrt{3}\left(1-2i\right)$.

أ- ما هي طبيعة المثلث ABC ؟ أحسب $\frac{d-a}{c-a}$ وإستنتج طبيعة المثلث ACD .

ب- نضع : $E=r\left(D\right)$ و لتكن F صورة D بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AC}$.

⇦ أحسب لحقي النقطتين E و F ، ثم أثبت أن المثلث BEF متساوي الأضلاع .

■ **التمرين رقم 02**: $(02pts)$

في المجموعة $G=\mathbb{R}^{*}\times\mathbb{R}$ نعرف قانون التركيب الداخلي $*$ كما يلي :

لكل (a,b) و (c,d) من G : $(a,b)*(c,d)=(ac,ad+b)$.

1)- بين أن $(G,*)$ زمرة غير تبادلية .

2)- نضع : $H=\mathbb{R}^{*+}\times\mathbb{R}$ ، بين أن H زمرة جزئية من $(G,*)$.

3)- لكل $(a,b)\in G$ ، نعتبر التطبيق $f_{(a,b)}$ المعرف من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ بما يلي :

$(\forall x\in\mathbb{R});f_{(a,b)}(x)=ax+b$ ، و نعتبر المجموعة : $\mathrm{E}=\left\{f_{(a,b)}/(a,b)\in G\right\}$

و ليكن h التطبيق المعرف من G نحو E بما يلي : $(\forall(a,b)\in G);h((a,b))=f_{(a,b)}$.

⇦ بين أن h تشاكل تقابلي من $(G,*)$ نحو $(\mathrm{E},\circ)$ ، ثم إستنتج بنية $(\mathrm{E},\circ)$ وحدد مماثل كل عنصر $f_{(a,b)}$ من E بالنسبة للقانون $\circ$.

■ **التمرين رقم 03**: $(04pts)$

الجزءان **الأول** و **الثاني** غير مرتبطين فيما بينهما .

⇦ **الجزء الأول**: $(1,25pts)$

1)- حدد عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم n_0 يحقق : $\left(2^3\right)^{n_0}\equiv1[17]$ و $\left(5^2\right)^{n_0}\equiv1[17]$.

2)- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^{*});5^{32n+1}-2^{48n+2}\equiv1[17]$.

⇦ **الجزء الثاني**: $(2,75pts)$

1)- نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}$ المعادلة : $(\mathrm{E}):ax\equiv1[p]$.

حيث a عنصر من $A_p=\{1;2;3;...;p-1\}$ و $p\geq3$ عدد أولي .

أ- بين أن العدد a^{p-2} حل للمعادلة (E) .

ب- ليكن r باقي القسمة الأقليدية ل a^{p-2} على p ، بين أن $r\in A_p$ و أن r هو الحل الوحيد للمعادلة (E) في المجموعة A_p .

2)- نأخذ فيما يلي من التمرين $p=31$.

أ- حدد قيمة r من أجل $a=2$ و $a=3$.

ب- حل في المجموعة $\mathbb{Z}$ كل معادلة مما يلي : $(\mathrm{F}_1):2x\equiv1[31]$ و $(\mathrm{F}_2):3x\equiv1[31]$.

ج- إستنتج مجموعة حلول المعادلة : $(\mathrm{F}):6x^2-5x+1\equiv0[31]$ في المجموعة $\mathbb{Z}$.

■ **التمرين رقم 04**: $(10pts)$

⇦ **الجزء الأول**: $(02pts)$

لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$(\forall t \in \mathbb{R}); h(t) = e^t - (t+1) .$$

1)- بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}); e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \displaystyle\int_0^x h(t)\,dt$.

2)- حدد منحى تغيرات الدالة h على كل من المجالين $[0;+\infty[$ و $]-\infty;0]$.

3)- ليكن $x \in \mathbb{R}^{*+}$ ، بين أن : $0 \le \displaystyle\int_0^x h(t)\,dt \le xh(x)$ و $\dfrac{1}{2} \le \dfrac{e^x - (x+1)}{x^2} \le \dfrac{1}{2} + \dfrac{h(x)}{x}$.

4)- ليكن $x \in \mathbb{R}^{*-}$ ، بين أن : $xh(x) \le \displaystyle\int_0^x h(t)\,dt \le 0$ و $\dfrac{1}{2} + \dfrac{h(x)}{x} \le \dfrac{e^x - (x+1)}{x^2} \le \dfrac{1}{2}$.

5)- أحسب : $\displaystyle\lim_{x \to 0} \dfrac{h(x)}{x}$ ، ثم إستنتج النهاية : $\displaystyle\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - (x+1)}{x^2}$.

⇦ **الجزء الثاني**: $(03pts)$

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*); f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \text{ و } f(0) = 1 .$$

1)- بين أن الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$.

2)- أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

3)- بين أن f قابلة للإشتقاق في الصفر (إستعمل نتيجة الجزء الأول **5**)-) .

4)- بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^*); f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{(e^x - 1)^2}$ ، حيث $\varphi(x) = (1-x)e^x - 1$.

5)- أدرس تغيرات φ على $\mathbb{R}$ وإستنتج إشارتها على $\mathbb{R}^*$.

6)- ضع جدول تغيرات الدالة f .

7)- أرسم المنحنى (C_f) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ مبرزا المماس في النقطة ذات الأفصول $x_0 = 0$.

⇦ **الجزء الثالث**: $(02pts)$

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$u_0=1$ و $(\forall n\in\mathbb{N});u_{n+1}=f(u_n)$.

1)- بين أن المعادلة : $(\mathrm{E}):f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ينبغي تحديده .

2)- أ- بين أن : $(\forall x\in]0;+\infty[);f'(x)+\dfrac{1}{2}=\dfrac{e^{2x}-2xe^{x}-1}{2(e^{x}-1)^{2}}$.

ب- بين أن لكل $x\in\mathbb{R}^{+}$: $e^{2x}-2xe^{x}-1\geq 0$ ، ثم إستنتج أن : $-\dfrac{1}{2}\leq f'(x)<0$.

3)- أ- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N});|u_{n+1}-\alpha|\leq\dfrac{1}{2}|u_n-\alpha|$.

ب- إستنتج أن : $(\forall n\in\mathbb{N});|u_n-\alpha|\leq\dfrac{1}{2^{n}}(1-\alpha)$ ، ثم أحسب نهاية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

⇦ **الجزء الرابع**: $(03pts)$

لتكن الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\mathrm{F}(x)=\displaystyle\int_{x}^{2x}f(t)\,dt$.

1)- بين أن : $(\forall x\in[0;+\infty[);0\leq\mathrm{F}(x)\leq xf(x)$ ، ثم إستنتج : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{F}(x)$.

2)- بين أن : $(\forall x\in]-\infty;0]);\mathrm{F}(x)\leq xf(x)$ ، ثم إستنتج : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\mathrm{F}(x)$ و $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{F}(x)}{x}$.

3)- بين أن F قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و أن :

$\mathrm{F}'(0)=1$ و $(\forall x\in\mathbb{R}^{*});\mathrm{F}'(x)=\dfrac{x(3-e^{x})}{e^{2x}-1}$.

4)- ضع جدول تغيرات الدالة F ، ثم أرسم المنحنى (C_{F}) في معلم متعامد و ممنظم .

(نعطي : $\ln 3\simeq 1{,}1$ و $\mathrm{F}(\ln 3)\simeq 0{,}44$) .

■ **التمرين الإضافي**: $(02\,pts\,plus)$

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$.

1)- بين أن : $(\forall x\in[0;1]);1+\dfrac{x^{2}}{2}\leq f(x)\leq 1+\dfrac{x^{2}}{2}+\dfrac{x^{4}}{12}$.

2)- أحسب نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^{*}}$ المعرفة بما يلي : $u_n=\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)\right)-n$.