

2 باك علوم رياضية	تجريبي مادة الرياضيات	الأكاديمية الجهوية للتربية و التكوين
المعامل : 09	دورة ماي 2011/2010	جهة الرباط سلازمورزغير - نيابة الخميسات
مدة الإنجاز : 04 ساعات		ثانوية موسى بن نصير

■ التمرين رقم 01: (04pts)

في كل ما يلي المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد و ممنظم (O, \vec{u}, \vec{v}) .
و الأجزاء الأول و الثاني غير مرتبطين فيما بينهما .

⇐ الجزء الأول: (02pts)

نعتبر في المجموعة \mathbb{C} المعادلة :

$$z^2 - 2iz - (1 + e^{2i\theta}) = 0, \text{ حيث } \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$$

1- ليكن $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ، بين أن :

$$e^{ix} - e^{iy} = 2i \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)} \text{ و } e^{ix} + e^{iy} = 2 \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}$$

2- حل في \mathbb{C} المعادلة (E_θ) ، ثم أكتب الحلين z_1 و z_2 على شكلهما الأسّي .

3- لتكن A و B النقطتين اللتين لحقاهما على التوالي z_1 و z_2 .

أ- بين أن النقط O و A و B غير مستقيمة و أن المثلث OAB قائم الزاوية .

ب- ما هي قيمة البارامتر الحقيقي θ التي من أجلها يكون المثلث OAB متساوي الساقين ؟

⇐ الجزء الثاني: (02pts)

نعتبر النقطتين A و B اللتين لحقاهما على التوالي a و $b+i$ حيث $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

و ليكن r الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{3}$ و النقطة B' هي صورة B بالدوران r .

1- أعط الكتابة العقدية للدوران r ، ثم أحسب $\text{aff}(B')$ بدلالة a و b .

2- بين أن : $B' \in (Oy) \Leftrightarrow a+b = \sqrt{3}$ ، ثم عبر في هذه الحالة عن $\text{aff}(B')$ بدلالة a .

3- نفترض فيما يلي أن : $a = \sqrt{3}$ و $b = 0$.

و لتكن C و D النقطتين اللتين لحقاهما على التوالي : $c = -i$ و $d = 2 + \sqrt{3}(1-2i)$.

أ- ما هي طبيعة المثلث ABC ؟ أحسب $\frac{d-a}{c-a}$ واستنتج طبيعة المثلث ACD .

ب- نضع : $E = r(D)$ و لتكن F صورة D بالازاحة ذات المتجهة \overrightarrow{AC} .

⇐ أحسب حقي النقطتين E و F ، ثم أثبت أن المثلث BEF متساوي الأضلاع .

■ التمرين رقم 02: (02pts)

ليكن المجال $G = [0;1]$ ، و تكون (a,b) من $G \times G$ نضع :

. حيث $E(\alpha)$ هو الجزء الصحيح للعدد الحقيقي α ، $a * b = a + b - E(a + b)$

(1)- بين أن * قانون تركيب داخلي في G .

(2)- بين أن القانون * تبادلي و تجميعي في G .

(3)- بين أن * يقبل عنصرا محايدا في G (ينبغي تحديده) .

(4)- بين أن كل عنصر a من G يقبل ماثلا a' (ينبغي تحديده) بالنسبة للقانون * .

(5)- ليكن $\{1\} - \mathbb{N}^*$ ، $n \in \mathbb{N}^*$ ، حل في المجموعة G المعادلة : $\underbrace{x * x * \dots * x}_{n \text{ fois}} = \frac{1}{n}$ (F)

■ التمرين رقم 03: (04pts)

الجزءان الأول والثاني غير مرتبطين فيما بينهما .

↔ الجزء الأول: (1,25pts)

(1)- حدد عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم n_0 يحقق : $(2^3)^{n_0} \equiv 1[17]$ و $(5^2)^{n_0} \equiv 1[17]$.

(2)- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 5^{32n+1} - 2^{48n+2} \equiv 1[17]$.

↔ الجزء الثاني: (2,75pts)

(1)- نعتبر في المجموعة \mathbb{Z} المعادلة : $(E): ax \equiv 1[p]$.

حيث a عنصر من $A_p = \{1; 2; 3; \dots; p-1\}$ و $p \geq 3$ عددا أولي .

أ- بين أن العدد a^{p-2} حل للمعادلة (E) .

ب- ليكن r باقي القسمة الأقليدية ل a^{p-2} على p ، بين أن $r \in A_p$ و أن r هو الحل الوحيد

للمعادلة (E) في المجموعة A_p .

(2)- نأخذ فيما يلي من التمرين $p = 31$.

أ- حدد قيمة r من أجل $a = 2$ و $a = 3$.

ب- حل في المجموعة \mathbb{Z} كل معادلة مما يلي : $(F_1): 2x \equiv 1[31]$ و $(F_2): 3x \equiv 1[31]$.

ج- إستنتج مجموعة حلول المعادلة : $(F): 6x^2 - 5x + 1 \equiv 0[31]$ في المجموعة \mathbb{Z} .

■ التمرين رقم 04: (10pts)

↔ الجزء الأول: (02pts)

تتكن h الدالة المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :

$$. (\forall t \in \mathbb{R}); h(t) = e^t - (t+1)$$

$$. (1) \text{- بين أن : } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \int_0^x h(t) dt \text{ ; } (\forall x \in \mathbb{R})$$

(2) - حداد منحنى تغيرات الدالة h على كل من المجالين $[0; +\infty[$ و $]-\infty; 0]$.

$$. (3) \text{- ليكن } x \in \mathbb{R}^{*+} \text{ ، بين أن : } 0 \leq \int_0^x h(t) dt \leq xh(x) \text{ و } \frac{1}{2} \leq \frac{e^x - (x+1)}{x^2} \leq \frac{1}{2} + \frac{h(x)}{x}$$

$$. (4) \text{- ليكن } x \in \mathbb{R}^{*-} \text{ ، بين أن : } xh(x) \leq \int_0^x h(t) dt \leq 0 \text{ و } \frac{1}{2} + \frac{h(x)}{x} \leq \frac{e^x - (x+1)}{x^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$. (5) \text{- أحسب : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{x} \text{ ، ثم إستنتج النهاية : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (x+1)}{x^2}$$

↔ الجزء الثاني: (03pts)

تتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :

$$. (\forall x \in \mathbb{R}^*); f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \text{ و } f(0) = 1$$

(1) - بين أن الدالة f متصلة على \mathbb{R} .

(2) - أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

(3) - بين أن f قابلة للإشتقاق في الصفر (إستعمل نتيجة الجزء الأول 5-) .

$$. (4) \text{- بين أن : } f'(x) = \frac{\varphi(x)}{(e^x - 1)^2} \text{ ; } (\forall x \in \mathbb{R}^*) \text{ ، حيث } \varphi(x) = (1-x)e^x - 1$$

(5) - أدرس تغيرات φ على \mathbb{R} وإستنتج إشارتها على \mathbb{R}^* .

(6) - ضع جدول تغيرات الدالة f .

(7) - أرسم المنحنى (C_f) في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) مبرزاً المماس في النقطة ذات الأفصول $x_0 = 0$.

← الجزء الثالث: (02pts)

تتكون المتتالية المعرفة بما يلي :

$$. (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f(u_n) \text{ و } u_0 = 1$$

(1)- بين أن المعادلة : $f(x) = x$ (E) تقبل حلا وحيدا α في \mathbb{R} ينبغي تحديده .

$$(2)- أ- بين أن : $(\forall x \in]0; +\infty[); f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x - 1)^2}$$$

ب- بين أن نكل $x \in \mathbb{R}^+$: $e^{2x} - 2xe^x - 1 \geq 0$ ، ثم استنتج أن : $-\frac{1}{2} \leq f'(x) < 0$

$$(3)- أ- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$$

ب- استنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}(1 - \alpha)$ ، ثم أحسب نهاية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

← الجزء الرابع: (03pts)

تتكون الدالة F المعرفة على \mathbb{R} بما يلي : $F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$

(1)- بين أن : $(\forall x \in [0; +\infty[); 0 \leq F(x) \leq xf(x)$ ، ثم استنتج : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

(2)- بين أن : $(\forall x \in]-\infty; 0]); F(x) \leq xf(x)$ ، ثم استنتج : $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{F(x)}{x}$

(3)- بين أن F قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و أن :

$$. (\forall x \in \mathbb{R}^*); F'(x) = \frac{x(3 - e^x)}{e^{2x} - 1} \text{ و } F'(0) = 1$$

(4)- ضع جدول تغيرات الدالة F ، ثم أرسم المنحنى (C_F) في معلم متعامد و ممنظم .

(نعطي : $\ln 3 \approx 1,1$ و $F(\ln 3) \approx 0,44$)

■ التمرين الإضافي: (02pts plus)

تتكون f الدالة المعرفة على \mathbb{R} بما يلي : $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

(1)- بين أن : $(\forall x \in [0; 1]); 1 + \frac{x^2}{2} \leq f(x) \leq 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12}$

(2)- أحسب نهاية المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي : $u_n = \left(\sum_{k=1}^n f\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right) \right) - n$