المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي
كتابة الدولة المكلفة بالتعليم

ثانوية الحسن الثاني التأهيلية
نيابة الرشيدية
الريصاني

الإمتحان التجريبي الموحد للبكالوريا
مارس 2009
الموضوع

المعامل:	7
مدة الإنجاز:	3 ساعات
المادة :	الرياضيات
الشعب :	العلوم الفيزيائية – علوم الحياة و الأرض.

(يسمح باستعمال الآلة الحاسبة الغير القابلة للبرمجة)

التمرين الأول (2 نقط)

1- أحسب التكامل : $\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}dx$. **0,75**

2- أ – تحقق أنه لكل $x \in \mathbb{R}^*$ لدينا: $\frac{e^{2x}+1}{e^x-1} = e^x - 1 + \frac{2e^x}{e^x-1}$. **0,5**

ب- أحسب التكامل : $J = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{2x}+1}{e^x-1}dx$. **0,75**

التمرين الثاني (3,5 نقطة)

أجزاء هذا التمرين مستقلة و يمكن إنجازها بشكل منفصل.

الجزء الأول

نعتبر المعادلة: $(E):\ \ z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i=0$ حيث $z \in \mathbb{C}$.

1- بين أن i حل للمعادلة (E). **0,5**

2- حدد الأعداد الحقيقية a و b و c بحيث : **0,75**

$z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i=(z-i)(az^2+bz+c)$.

3- إستنتج حلول المعادلة (E). **0,5**

الجزء الثاني

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A و B و C ذات الألحاق : i و $2+3i$ و $2-3i$.

1- ليكن r الدوران ذو المركز B و الزاوية $\frac{\pi}{4}$، حدد لحق النقطة A' صورة A بالدوران r. **0,75**

2- بين أن النقط A' و B و C مستقيمية و حدد النسبة العقدية للتحاكي ذو المركز B الذي يحول C إلى A'. **1**

التمرين الثالث (5,5 نقطة)

الجزء الأول

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=\ln(1+x)-x$

1- أ- أحسب $g'(x)$ لكل x من $[0,+\infty[$ ثم بين أن الدالة g تناقصية قطعا على $[0,+\infty[$. **0,75**

ب- استنتج أن : $g(x) \leq 0$ لكل x من $[0,+\infty[$. **0,25**

2- بين أن $0 \leq \ln(1+x) \leq x$ لكل x من $[0,+\infty[$. **0,5**

الجزء الثاني

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة بـ : $(\forall n\in\mathbb{N}^*) : u_n=\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}dx$.

1- أحسب u_1. 0,5

2- أ- بين أن: $(\forall x\geq 0) : 1-x^n\leq \frac{1}{1+x^n}\leq 1$. 0,5

ب- استنتج أن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*) : 1-\frac{1}{n+1}\leq u_n\leq 1$. 0,25

ج- حدد $\lim u_n$. 0,25

نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\geq1}$ المعرفة بـ: $(\forall n\in\mathbb{N}^*) : v_n=\int_0^1 \frac{nx^n}{1+x^n}dx$.

3- أ- بين باستعمال مكاملة بالأجزاء أن: $v_n=\ln(2)-\int_0^1\ln(1+x^n)dx$. 1

ب- بين أنه لكل $n\in\mathbb{N}^*$ لدينا: $0\leq\int_0^1\ln(1+x^n)dx\leq\frac{1}{1+n}$ (يمكنك إستعمال 2 - من الجزء الأول). 0,5

ج- استنتج أن : $\lim v_n=\ln(2)$. 0,25

4- أ - تحقق أنه لكل $n\in\mathbb{N}^*$: $v_n+nu_n=n$. 0,5

ب- استنتج أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} n(1-u_n)=\ln(2)$. 0,25

مسألة (9 نقط)

الجزء الأول

لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي: $g(x)=1+x\ln(x)$.

1- ادرس تغيرات g 0,75

2- استنتج أن $g(x)\geq 1-\frac{1}{e}$ لكل x من $]0,+\infty[$ و استنتج إشارة $g(x)$. 0,5

3- بين أن $(x-1)\ln(x)\geq 0$ لكل x من $]0,+\infty[$. 0,75

الجزء الثاني

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي : $f(x)=(\ln x)^2+\frac{\ln x}{x}+1$.

و ليكن $(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. حدد $\mathcal{D}_f$ مجموعة تعريف الدالة f و أحسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. 0,75

2. بين أن : $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$. 0,5

3. أ- بين أن : $(\forall x>0) : f'(x)=\frac{(x-1)\ln(x)+g(x)}{x^2}$. 1

ب- أنشى جدول تغيرات الدالة f. 0,5

4. بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$ ثم حدد الفرع اللانهائي لـ $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $+\infty$. 1

5. حدد معادلة المماس (T) لـ $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة $A(1,f(1))$. 0,25

6. أنشئ (T) و $(\mathcal{C}_f)$. 1,25

7. أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن: $\int_1^e(\ln x)^2dx=e-2$. 0,75

ب- أحسب التكامل : $\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx$. 0,5

ج- حدد مساحة الحيز المحصور بين المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و محور الأفاصيل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين: $x=1$ و $x=e$. 0,5

تشكل العناصر المكونة لهذا الإختبار حوالي 14 من أصل العشرين نقطة بالإمتحان الوطني الموحد .

بالتوفيق

تصحيح الإمتحان التجريبي 2009\2008

التمرين الأول:

1. لدينا : $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}dx = \int_0^2 \frac{1}{3}\times 3x^2(1+x^3)^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{3}\int_0^2 \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}\left((1+x^3)^{-\frac{1}{2}+1}\right)' dx$

وبالتالي: $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}dx = \frac{2}{3}\left[\sqrt{1+x^3}\right]_0^2 = \frac{4}{3}$.

$$\boxed{\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}dx = \frac{4}{3}}$$

2. أ- لدينا لكل $x \in \mathbb{R}$

$$e^x - 1 + \frac{2e^x}{e^x-1} = \frac{(e^x-1)^2+2e^x}{e^x-1} = \frac{e^{2x}+1}{e^x-1}$$

و منه : $\displaystyle J = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{2x}+1}{e^x-1}dx = \int_{\ln 2}^{\ln 3}\left(e^x - 1 + \frac{2e^x}{e^x-1}\right)dx = \left[e^x - x + 2\ln(e^x-1)\right]_{\ln 2}^{\ln 3}$

و بالتالي:

$$\boxed{J = 1 + 3\ln 2 - \ln 3}$$

التمرين الثاني:

الجزء الأول

1- واضح.

2- الطريقة الأولى:

$$\begin{aligned} z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i &= (z-i)(az^2+bz+c) \\ &= az^3+(b-ai)z^2+(c-bi)z-ic \end{aligned}$$

و منه $a=1$ و $c-bi=13+4i$ و بالتالي: $a=1,\ \ b=-4,\ \ c=13$.

الطريقة الثانية : باستعمال القسمة الأقليدية

$$\begin{array}{rrrr|l} z^3 & -(4+i)z^2 & +(13+4i)z & -13i & z \quad -i \\ \cline{5-5} -z^3 & +iz^2 & & & z^2 \ -4z\ +13 \\ \cline{1-2} & -4z^2 & +(13+4i)z & -13i & \\ & 4z^2 & -4iz & & \\ \cline{2-3} & & 13z & -13i & \\ & & -13z & +13i & \\ \cline{3-4} & & 0 & +0 & \end{array}$$

3- لدينا :

$$\begin{aligned} z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i=0 &\iff (z-i)(z^2-4z+13)=0 \\ &\iff (z=i)\vee(z^2-4z+13=0) \end{aligned}$$

نحل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E'):\ z^2-4z+13=0$

لدينا $\Delta=(4)^2-4\times 13=-36<0$ و منه فإن للمعادلة (E') حلان عقديان مترافقان هما $2+3i$ و $2-3i$.

و بالتالي :

$$\boxed{S=\{i\ ;\ 2+3i\ ;\ 2-3i\}}$$

الجزء الثاني:

1. الكتابة العقدية للدوران r ذو المركز B والزاوية $\frac{\pi}{4}$ هي $z' - z_B = e^{i\frac{\pi}{4}}(z - z_B)$.

و بالتالي $z_{A'} - z_B = e^{i\frac{\pi}{4}}(z_A - z_B)$ و منه:

$$\boxed{z_{A'} = 2 + (3 - 2\sqrt{2})i}$$

2. نبين أن النقط A' و B و C مستقيمية.

__الطريقة الأولى:__ لدينا $\overrightarrow{A'B}(2\sqrt{2}i)$ و $\overrightarrow{BC}(-6i)$ أي أن $\overrightarrow{BC} = -3\sqrt{2}\overrightarrow{A'B}$ و منه النقط A' و B و C مستقيمية.

__الطريقة الثانية:__ لدينا B مختلفة عن C و $\frac{z_{A'} - z_B}{z_C - z_B} = \frac{\sqrt{2}}{3} \in \mathbb{R}$ و منه النقط A' و B و C مستقيمية.

نحدد الكتابة العقدية للتحاكي h ذو المركز B الذي يحول C إلى A'، نحدد أولا k نسبة التحاكي

لدينا :

$$h(C) = A' \iff \overrightarrow{BA'} = k\overrightarrow{BC} \iff k = \frac{z_{A'} - z_B}{z_C - z_B} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

و منه الكتابة العقدية ل h هي : $z' - z_B = \frac{\sqrt{2}}{3}(z - z_B)$ أي

$$\boxed{z' = \frac{\sqrt{2}}{3}z - \left(\frac{\sqrt{2}}{3} - 1\right)(2 + 3i)}$$

التمرين الثالث:

الجزء الأول:

1- أ- لدينا : $(\forall x \in [0, +\infty[) : g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} \leq 0$

و لأجل $x \geq 0$ لدينا : $x = 0 \iff g'(x) = 0$ و منه الدالة g تناقصية قطعا على $[0, +\infty[$.

ب- g تناقصية على $[0, +\infty[$ و بالتالي : $(\forall x \in [0, +\infty[) : g(x) \leq g(0) = 0$.

2- لكل $x \geq 0$ لدينا $1 + x \geq 1$ وبالتالي : $(1) : \ \ln(1+x) \geq \ln 1 = 0$

و حسب ما سبق لكل $x \geq 0$ لدينا : $\ln(1+x) \leq x \iff \ln(1+x) - x \leq 0 \iff g(x) \leq 0$.

و منه $(2) : \ \ln(1+x) \leq x$.

من (1) و (2) نستنتج : $\boxed{(\forall x \in [0, +\infty[) : 0 \leq \ln(1+x) \leq x}$.

الجزء الثاني:

1- لدينا : $u_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2$

$$\boxed{u_1 = \ln 2}$$

2- لدينا لأجل $x \geq 0$.

$$1 - x^n \leq \frac{1}{1+x^n} \leq 1 \Leftrightarrow 1 - x^{2n} \leq 1 \leq 1 + x^n$$

هذه العبارة صحيحة و بالتالي فإنه : $\boxed{(\forall x \geq 0) : 1 - x^n \leq \frac{1}{1+x^n} \leq 1}$

2- حسب 2- لكل $n \in \mathbb{N}^*$ لدينا $\int_0^1 (1-x^n)dx \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}dx \leq \int_0^1 1dx$ و بالتالي:

$$\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 1 - \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq 1}$$

3- أ- لدينا :

$$v_n = \int_0^1 \frac{nx^n}{1+x^n}dx = \int_0^1 x\frac{nx^{n-1}}{1+x^n}dx = \left[x\ln(1+x^n)\right]_0^1 - \int_0^1 \ln(1+x^n)dx = \ln 2 - \int_0^1 \ln(1+x^n)dx$$

و بالتالي:

$$\boxed{v_n = \ln(2) - \int_0^1 \ln(1+x^n)}$$

ب- حسب 2- من الجزء الأول لدينا : $0 \le \ln(1+x) \le x$ لكل x من $[0,+\infty[$ و منه لكل $n \in \mathbb{N}^*$ و لكل $x \in [0,1]$ لدينا:

$$0 \le \ln(1+x^n) \le x^n$$

و بالتالي : $\int_0^1 0dx \le \int_0^1 \ln(1+x^n)dx \le \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^n}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$ أي أن:

$$\boxed{0 \le \int_0^1 \ln(1+x^n)dx \le \frac{1}{1+n}}$$

ج – من السؤال السابق لدينا : $\lim_{n\to+\infty} \ln(1+x^n) = 0$ و من 3- أ لدينا :

$$\boxed{\lim v_n = \ln 2}$$

4- أ- لدينا:

$$v_n + nu_n = \int_0^1 \frac{nx^n}{1+x^n}dx + n\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}dx = \int_0^1 \frac{nx^n}{1+x^n} + n\frac{1}{1+x^n}dx$$
$$= \int_0^1 \frac{n(1+x^n)}{1+x^n}dx = \int_0^1 ndx = n$$

ب- لدينا حسب السؤال السابق:

$$\lim_{n\to+\infty} n(1-u_n) = \lim_{n\to+\infty} v_n = \ln 2$$

مسألة :

الجزء الأول:

1- لدينا g قابلة للإشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ لأنها مجموع دالتين قابلتين للإشتقاق على $]0,+\infty[$.

و لكل $x > 0$ لدينا: $g'(x) = (1+x\ln(x))' = \ln(x) + x.\frac{1}{x} = 1 + \ln(x)$

$$\boxed{(\forall x > 0) : g'(x) = 1 + \ln(x)}$$

و منه : $g(x) = 0 \iff 1 + \ln(x) = 0 \iff \ln(x) = -1 \iff x = e^{-1}$

و بالتالي لدينا جدول التغيرات :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$g(x)$	|| 1	$\searrow$	$\frac{e-1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

2- حسب جدول التغيرات السابق لدينا :

$$(\forall x > 0) : g(x) \ge 1 - \frac{1}{e}$$

وبما أن $e > 1$ فإن $\frac{1}{e} < 1$ وبالتالي فإن : $1 - \frac{1}{e} > 0$ و منه :

$$\boxed{(\forall x > 0) : g(x) > 0}$$

3- لدينا :

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$x-1$	‖	$-$	0	$+$	
$(x-1)\ln(x)$	‖	$+$	0	$+$	

و بالتالي : $\boxed{(\forall x \in]0,+\infty[) : (x-1)\ln(x) \geq 0}$.

الجزء الثاني:

1- لدينا: $\mathcal{D}_f =]0,+\infty[$

و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (\ln x)^2 + \frac{\ln x}{x} + 1 = +\infty + 0 + 1 = +\infty$.

2- لدينا: $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} (\ln(x))^2 \left(1 + \frac{1}{x\ln x}\right) + 1 = +\infty.\left(1 + \frac{1}{0^-}\right) + 1 = -\infty$.

3-أ- لكل $x > 0$ لدينا

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left((\ln x)^2 + \frac{\ln x}{x} + 1\right)' \\
&= 2\ln x(\ln x)' + \frac{1-\ln x}{x^2} \\
&= \frac{2\ln x}{x} + \frac{1-\ln x}{x^2} \\
&= \frac{2x\ln x + 1 - \ln x}{x^2} \\
&= \frac{x\ln x - \ln x + 1 + x\ln x}{x^2} \\
&= \frac{(x-1)\ln x + g(x)}{x^2}
\end{aligned}$$

ب- من 2- و 3- من الجزء الأول نستنتج جدول التغيرات التالي:

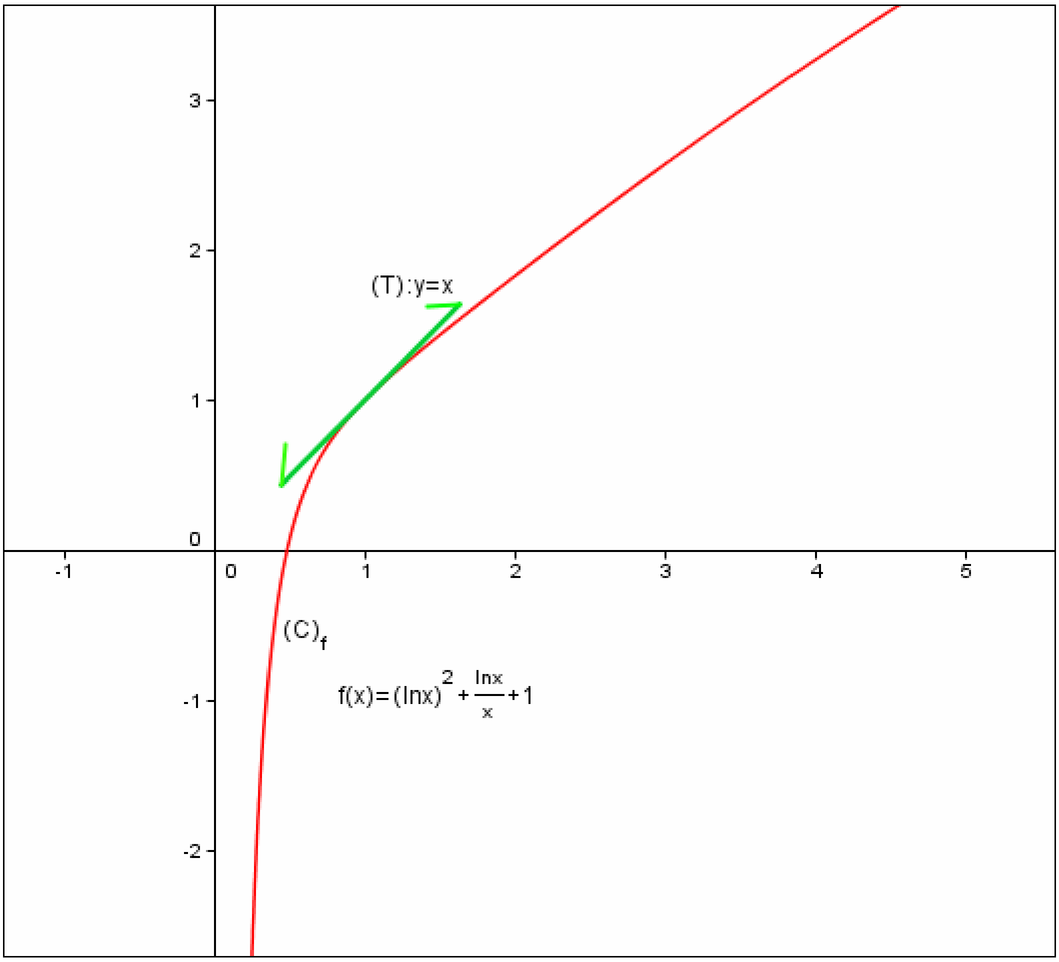
x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

4- لدينا : $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2 = \lim_{x\to+\infty} 4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 = 0$

و منه : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} + \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x} = 0$ و بالتالي فإن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$.

5- f قابلة للإشتقاق في 1 و حسب 3- أ لدينا: $f'(1) = \frac{(1-1)\ln 1 + g(1)}{1^2} = 1$ و منه فإن معادلة (T) المماس ل $(\mathcal{C}_f)$ في النقطة $A(1,1)$ هي $y = f'(1)(x-1) + f(1) = x$ أي أن : $\boxed{(T) : y = x}$

6- منحنى الدالة f و المماس (T).



7- أ- لدينا :

$$\begin{aligned}\int_1^e (\ln x)^2dx &= \int_1^e x'(\ln x)^2dx\\ &= \left[x(\ln x)^2\right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{x}\ln(x)dx\\ &= e-2\int_1^e \ln(x)dx = e-2\left([x\ln x]_1^e - \int_1^e \frac{x}{x}dx\right)\\ &= e-2(0-1\ln 1+1) = e-2\end{aligned}$$

و بالتالي : $\boxed{\int_1^e (\ln x)^2dx = e-2}$.

ب- لدينا : $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \int_1^e \frac{1}{x}\ln(x)dx = \int_1^e \ln'(x)\ln(x)dx = \left[\frac{1}{2}\ln(x)\right]_1^e = \frac{1}{2}$

و منه : $\boxed{\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}}$.

ج- $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ مساحة الحيز $\mathcal{A}$ المحصور بين المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و محور الأفاصيل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين: $x=1$ و $x=e$ هي :

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{\mathcal{A}} &= \int_1^e |f(x)|dx = \int_1^e f(x)dx\\ &= \int_1^e (\ln x)^2dx + \int_1^e \frac{\ln x}{x} + \int_1^e 1dx\\ &= e-2+\frac{1}{2}+[x]_1^e = 2e-\frac{5}{2}\end{aligned}$$

و منه : $\boxed{\mathcal{S}_{\mathcal{A}} = 2e-\frac{5}{2}}$ بوحدة قياس المساحات.

عبد الإله لمراني علوي.
www.math4all.jeun.fr