الامتحان التجريبي الموحد في مـــادة الرياضيـــات
دورة أبريـــل 2009

المـــادة : الرياضيـــات

الشعبـــة : العلوم الفيزيائية علوم الحياة والأرض

مدة الانجاز : 3 ســـاعـــات

المعامـــل : 7

التمرين الأول : (3 ن)

1. أ- تحقق من أن : $\frac{e^{2x}}{e^x+1}=e^x-\frac{e^x}{e^x+1}$. (0,5)

ب- استنتج قيمة التكامل : $I=\int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx$. (1)

2. باستعمال المكاملة بالأجزاء ، أحسب التكامل $J=\int_0^1 e^x \ln\left(1+e^x\right)\,dx$. (1,5)

التمرين الثاني : (6 ن)

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E):\ \left(-iz+3i+3\right)^2-2\left(-iz+3i+3\right)+2=0$.

1. أ- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $(1):\ z^2-2z+2=0$. (0,5)

ب- حدد الشكل المثلثي لحلي المعادلة (1). (0,5)

جـ- استنتج حلول المعادلة (E). (0,5)

2. نعتبر في المستوى العقدي $\mathscr{P}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$، النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي : $z_A=1+i$ و $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=2z_B$.

أ- مثل النقط A و B و C في المستوى العقدي $\mathscr{P}$. (0,25)

ب- بين أن النقط A و B و C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها $I(3)$ وشعاعها $R=\sqrt{5}$. (1)

جـ- أحسب $\frac{z_C-3}{z_A-3}$. (0,5)

د- حدد قياسا للزاوية $\left(\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IC}}\right)$ واستنتج طبيعة المثلث IAC. (1)

3. لتكن E صورة النقطة O بالإزاحة ذات المتجهة $2\overrightarrow{IC}$ ؟

أ- حدد لحق النقطة E. (0,25)

ب- لتكن D صورة النقطة E بالدوران R الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$. حدد لحق النقطة D. (0,5)

جـ- تحقق من أن : $\frac{z_B-z_A}{z_D-z_C}=-i$ وبين أن : $(AB)\perp(CD)$. (1)

11 ن

مسألة :

الجزء الأول :

نعتبر الدالة العددية g المعرفة بما يلي : $g(x)=x+1-\ln(x)$.

0,5   1. أحسب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

1   2. أحسب $g'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}_+^*$ ثم حدد جدول تغيرات g.

0,5   3. استنتج أن لكل x من $\mathbb{R}_+^*$ ، لدينا : $g(x)>0$.

الجزء الثاني :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=e^{\frac{x+1}{x}\ln x} & , \quad x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

وليكن $(\mathscr{C}_f)$ منحناها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

0,5   1. أدرس اتصال الدالة على اليمين في النقطة 0 .

0,5   2. أ- تحقق من أن : $\frac{f(x)}{x}=e^{\frac{1}{x}\ln x}$ ، $\forall x\in]0,+\infty[$.

0,5   ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في النقطة 0، ثم أول النتيجة هندسيا.

0,25   جـ- أحسب : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

0,5   د- بين أن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-x}{\ln x}=1$ (يمكنك استعمال النتيجة $\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}=1$)

0,5   استنتج أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=+\infty$ ، ثم حدد الفرع اللانهائي للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

1   3. أحسب $f'(x)$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$ ، ثم ادرس إشارتها وأعط جدول تغيرات f .

0,25   4. أ- أحسب $f(1)$ و $f(2)$ و $f(3)$.

1   ب- أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$. (نعطي : $3^{\frac{4}{3}}\approx4,3$ ونقبل أن $A(1,1)$ نقطة انعطاف للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$).

0,5   5. باستعمال المكاملة بالأجزاء ، أحسب التكامل التالي : $\int_1^e \ln x\, dx$.

1   6. أحسب مساحة الحيز (Δ_g) المحصور بين $(\mathscr{C}_g)$ ومحور الأفاصيل والمستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=1$ و $x=e$.

الجزء الثالث :

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=g(u_n) & , \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1   1. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ 1\le u_n<e$.

0,5   2. بين أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تزايدية.

1   3. استنتج أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة وأحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.