المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي وتكوين الأطر و البحث العلمي قطاع التربية الوطنية الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين جهة فاس- بولمان- مقاطعة أكدال	الامتحان التجريبي1 المادة : الرياضيات المستوى : الثاني من سلك البكالوريا الشعبة : العلوم الرياضية -ثانوية ابن حزم-	المعامل: 9 مدة الإنجاز: 4 س السنة الدراسية: 2010/2009

التمرين الأول

OAB مثلث قائم الزاوية و متساوي الساقين رأسه O بحيث : $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

انطلاقا من كل نقطة M من القطعة [AB] ، ننشئ المسقطين العموديين P و Q للنقطة M على (OA) و (OB) على التوالي،

و النقطتين R و S رأسي المربع PRQS الذي أحد قطريه [PQ] بحيث : $(\overrightarrow{PR},\overrightarrow{PS})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

نهدف إلى تحديد المحلات الهندسية للنقطتين R و S عندما تتغير النقطة M على القطعة [AB] .

نختار معلما متعامدا ممنظما بحيث : $\vec{u}=\frac{1}{OA}\overrightarrow{OA}$ و $(\vec{u},\vec{v})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

a و ai هما لحقا النقطتين A و B في هذا المعلم (حيث a عدد حقيقي) .

1) بين أن لحق النقطة M يكتب على الشكل $x+i(a-x)$ ، حيث x عدد حقيقي من [0, a]. 0.5

استنتج لحق كل من النقطتين P و Q.

2) نعتبر z و z’ لحقا R و S على التوالي. 0.5

بين أن : $z-x=i(z-i(a-x))$ و $z'-i(a-x)=i(z'-x)$.

3) استنتج أن موضع النقطة R غير مرتبط بموضع النقطة M. حدد هذا الموضع بالنسبة للنقطتين A و B. 0.5

4) تحقق من أن $z'=(x-\frac{a}{2})(1-i)$. استنتج المحل الهنسي للنقطة S عندما تتغير التقطة M على القطعة [AB]. 0.75

التمرين الثاني

1)بلستعمال مبرهنة فيرما بين أنه إذا كان k عدد أولي موجب يحقق $k/4^k-1$.فإن k= 3 0.25

2)ليكن p و q عددان أوليان موجبان بحيث $p/4^q-1$ و $q/4^p-1$.

a)أوجد p في حالة p = q. 0.25

b)نفترض أن $p\langle q$.

بين أن : $\begin{cases}4^q\equiv 1[p]\\ \text{و}\\ 4^{p-1}\equiv 1[p]\end{cases}$ 0. 5

c)ليكن d اصغر عدد صحيح طبيعي غير منعدم يحقق $4^d\equiv 1[p]$. 0.75

أثبت أن $d/p-1$ و d/q.

d)استنتج أن : p = 3 و q = 7. 0. 5

3)أوجد جميع الأزواج (p.q) التي تحقق p و q عددان أوليان موجبان و $p/4^q-1$ و $q/4^p-1$ 0.25

التمرين الثالث

ليكن $q\in\mathbb{R}$ نضع $J=\begin{pmatrix}0&-q\\1&0\end{pmatrix}$ و $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ ونعتبر المجموعة

$$E=\{\, M\in M_2(\mathbb{R}) \ / \ M\times J=J\times M\}$$

1) a) بين أن $(E,+,\times)$ حلقة واحدية. — 0.5

b) بين أن: $J^2+q.I=O_2$ مع I هي المصفوفة الواحدية و O_2 المصفوفة المنعدمة. — 0.5

c) استنتج أنه إذا كانت $q\le 0$ فإن $(E,+,\times)$ حلقة غير كاملة. — 0.25

2) نفترض فيما يلي أن $q>0$ ونضع $\omega=i\sqrt{q}$.

a) بين أن $E=\left\{ M_{(x,y)}=\begin{pmatrix}x&-qy\\y&x\end{pmatrix} \ / \ (x,y)\in IR^2\right\}$ — 0.5

b) بين أن $(1,\omega)$ أساس في الفضاء المتجهي $(\mathbb{C},+,.)$. — 0.5

c) استنتج أن التطبيق

$$\varphi : (\mathbb{C}^*,\times) \to (E^*,\times)$$
$$x+\omega y \to M_{(x,y)}$$

تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E^*,\times)$ — 0.25

d) حدد بنية $(E^*,\times)$. — 0.25

3) باستعمال ماسبق بين أن $q>0 \iff$ ($(E,+,\times)$ جسم) — 0.5

4) في هذا السؤال نأخذ $q=1$

أ- أحسب بدلالة العدد الصحيح الطبيعي n المصفوفة $\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}^n$ يمكن استعمال التشاكل φ — 0.25

ب- حل في $(E,+,\times)$ المعادلة $X^3=-I$ يمكن استعمال التشاكل — 0.5

التمرين الرابع

لكل $m\in\mathbb{N}$ نرمز ب f_m للدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ ب $f_m(x)=\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2m.x}}}$

و نرمز ب (C_m) لمنحناها في م م م $(O,\vec{i},\vec{j})$ الوحدة $2cm$

الجزء 1:

1) تحقق أن $\forall m\in\mathbb{N},\forall x\in\mathbb{R}: 0<f_m(x)<e^x$ ثم احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x)$ و أول مبيانيا النتيجة المحصلة. — 0.5

2) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x)$ ناقش تبعا لقيم m $(m=0, m=1, m\ge 2)$ — 0.5

3) بين أن f_m قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و أن $\forall x\in\mathbb{R}: f_m'(x)=\dfrac{e^x\left(1-(m-1)e^{2mx}\right)}{(1+e^{2mx})^{\frac{3}{2}}}$ — 0.5

4) بين أن $\forall x\in\mathbb{R}: 0<f_1'(x)<\dfrac{1}{2}$ ضع جدول تغيرات f_1 و f_2 — 0.5

5) احسب $f_1''(x)$ وادرس تقعر (C_1) — 0.5

6) بين أن المعادلة $f_1(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $\alpha\in\left]0;1\right[$. قارن α و $\ln 2$. — 0.5

7) ادرس الفروع اللانهائية للمنحنيين (C_1) و (C_2) — 0.25

8)تحقق أن $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}=\sqrt{\frac{1+e^{2.x}}{1+e^{4.x}}}$ و ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) و (C_2)	0.25
9)أكتب معادلة المماس (T) عند $A(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$	0.25
10)أنشئ المنحنيات (C_0) و (C_2) (C_1)	0.75
11)نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي $\begin{cases} u_0 \in]0;\alpha[\\ (\forall n\in\mathbb{N})(u_{n+1}=f_1(u_n)) \end{cases}$	
a) بين أن $\forall n\in\mathbb{N}: u_n>0$	0.25
b) بين أن $\forall n\in\mathbb{N}: \lvert u_{n+1}-\alpha\rvert \le \frac{1}{2}\lvert u_{n+1}-\alpha\rvert$	0.5
c) استنتج أن (u_n) متقاربة وحدد نهايتها	0.25
الجزء2	
نعتبر الدالة $\varphi(x)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt$	
	0.5
1)أثبت أن φ معرفة على IR و أن φ فردية	0.25
2)أ- أثبت أن $\forall x>0: \ln(1+x)\le\varphi(x)$ (لاحظ $1+t^2\le(1+t)^2$) و استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$	0.25
ب- أثبت أن φ تقابل من IR نحو IR و لتكن g دالتها العكسية (حساب g غير مطلوب)	
	0.5
3) أ- أثبت أن: g قابلة للإشتقاق على IR و أن أثبت أن: $\forall x\in\mathbb{R}: g'(x)=\sqrt{1+g^2(x)}$	0.25
ب- استنتج أن g حلا المعادلة التفاضلية $y''-y=0$	
ج- تحقق أن $g(0)=0$ و $g'(0)=1$ ثم حدد $g(x)$ بدلالة x	0.25
د- استنتج أن $\forall x\in\mathbb{R}: \varphi(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$	0.5
الجزء3:	
نضع $J_n(x)=\int_1^x \frac{n}{t\sqrt{1+t^{2n}}}dt$ و $F_n(x)=n\int_0^{\ln x} f_n(t)dt$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)(\forall x\succ 0)$	
	0.5
1)أثبت أن: F_n قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ استنتج أن $\forall x>0: F_n(x)=\int_1^x \frac{n}{\sqrt{1+t^{2n}}}dt$	
	0.5
2)أثبت أن $\forall x>0: F_1(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\ln(1+\sqrt{2})$	
	0.5
3)تحقق أن $F_n(x)-J_n(x)=\int_1^x \frac{nt^n}{\sqrt{1+t^{2n}}}(\frac{t-1}{t^{n+1}})dt$ استنتج أن $0\le F_n(x)-J_n(x)\le\int_1^x n(\frac{t-1}{t^{n+1}})dt$	
	0.75
4)أحسب $\int_1^x n(\frac{t-1}{t^{n+1}})dt$ استنتج أن $\forall x>1: \lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x)-J_n(x)=0$	
5)أثبت أن $J_n(x)=\int_{\frac{1}{x^n}}^1 \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du$ استنتج أن $\forall x>1: \lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x)=\ln(1+\sqrt{2})$	1