الأكاديمية الجهوية للتربية و التكوين	**الامتحان التجريبي الموحد**	عدد الصفحات: 3
جهة الدار البيضاء الكبرى	**السنة الثانية سلك البكالوريا**	المعامل: 9
نيابة النواصـــر	**شعبة العلوم الرياضية ـأـ**	مدة الإنجاز : 4 ساعات
ثانوية أبي حيان التوحيدي	**دورة مـــاي** 2012	hamdane_mo@hotmail.fr

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة الغير قابلة للبرمجة

التمرين الأول

I) لكل x و y من المجال $\mathcal{I} =]0;1[$ نضع: $x \star y = \dfrac{2xy}{(1-x)(1-y)+2xy}$

(0,25 pt) ❶ بين أن $\star$ قانون تركيب داخلي في $\mathcal{I}$.

(0.5 pt) ❷ (أ) بين أن التطبيق: $\varphi(x) = \dfrac{x}{2+x}$ تشاكل تقابلي من $\left(\mathbb{R}^{+*};\times\right)$ نحو $(\mathcal{I};\star)$.

(0,5 pt) (ب) استنتج أن $(\mathcal{I};\star)$ زمرة تبادلية ثم حدد العنصر المحايد في $(\mathcal{I};\star)$.

(0,75 pt) ❸ بين أن $\left\{\dfrac{1}{1+2\times 3^m}\,;m\in\mathbb{Z}\right\}$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathcal{I};\star)$.

II) نذكر أن $(\mathscr{M}_3(\mathbb{R});+;\times)$ حلقة واحدية و أن $(\mathscr{M}_3(\mathbb{R});+;\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

نضع: $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & -2 \\ 0 & 1+\sqrt{2} & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ و $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(0,75 pt) ❶ تحقق أن: $B = A - \left(1+\sqrt{2}\right)I$. ثم أثبت أن: $A^2 = 2A + I$.

(0,75 pt) ❷ بين أن B قاسم للصفر في الحلقة $(\mathscr{M}_3(\mathbb{R});+;\times)$.

التمرين الثاني

a عدد صحيح طبيعي فردي مخالف للعدد 977 بحيث $3 \leqslant a \leqslant 1953$.

(0,75 pt) ❶ تحقق أن 977 عدد أولي ثم بين أن $a^{976} \equiv 1[977]$.

(0,75 pt) ❷ استنتج أن لكل عدد صحيح طبيعي k لدينا $a^{976k} \equiv 1[1954]$.

❸ نعتبر في $\mathbb{N}^2$ المعادلة: $(E) : a^2x - (a-1)y = 1$.

(0,75 pt) (أ) تحقق أن الزوج $(1;a+1)$ حل للمعادلة (E) . ثم حل في $\mathbb{N}^2$ المعادلة (E).

(0,75 pt) (ب) ليكن $(a^m;y)$ حل للمعادلة (E) بحيث $m \equiv -2[976]$. بين أن: $y \equiv 0[1954]$

التمرين الثالث

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O; \vec{e_1}; \vec{e_2})$.

الجزء الأول : نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(E): \ z^2 - \left(2 + \frac{3}{5}i\right) z + 1 + i = 0$.

(0,75 pt) ❶ أكتب على الشكل الجبري العدد العقدي $(4-5i)^2$ ثم حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

❷ α و β عددان حقيقيان من المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ بحيث: $\tan(\alpha) = 7$ و $\tan(\beta) = \frac{4}{3}$.

(0,75 pt) أكتب حلي المعادلة (E) على الشكل المثلثي و استنتج أن : $\mathrm{Arctg}(7) + \mathrm{Arctg}\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{3\pi}{4}$.

الجزء الثاني : a عدد عقدي غير منعدم و A نقطة من المستوى العقدي لحقها a .

نعتبر الدوران $\mathscr{R}$ الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$ ، و التحاكي h الذي مركزه O و نسبته k $(k \in \mathbb{R}^*)$.

نضع : $M = h(A)$ و $P = \mathscr{R}(M)$ و ليكن m لحق النقطة M و p لحق النقطة P .

(0,5 pt) ❶ حدد بدلالة a و k العددين العقديين m و p .

❷ لتكن H المسقط العمودي للنقطة O على المستقيم (AP) و R النقطة التي لحقها العدد العقدي $m + ia$.

(0,5 pt) (أ) بين أن $\dfrac{p-a}{m+ia}$ تخيليا صرفا و استنتج أن النقط O و H و R مستقيمية.

(0.25 pt) (ب) بين أن النقطة H تنتمي إلى الدائرة المحاطة بالمثلث AMR.

التمرين الرابع

الجزء الأول : نعتبر الدالة g المعرفة على $[0; +\infty[$ بما يلي: $\mathrm{g}(x) = 2x + 1 - (x+1)e^x$.

و ليكن $(\mathscr{C}_\mathrm{g})$ منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(0,75 pt) ❶ أدرس تغيرات $\mathrm{g}'(x)$ ثم استنتج إشارتها على المجال $[0; +\infty[$.

(0,75 pt) ❷ أدرس تغيرات الدالة g و استنتج أن $\mathrm{g}(x) \leqslant 0$ لكل x من $[0; +\infty[$.

الجزء الثاني : نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ بما يلي: $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{xe^x} ; \ x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$.

و ليكن $(\mathscr{C}_f)$ منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(0,5 pt) ❶ بين أن f متصلة على $[0; +\infty[$.

(0,25 pt) ❷ ليكن x من $]0; +\infty[$. بين أن: $f'(x) = \dfrac{\mathrm{g}(x)}{(xe^x)^2}$.

❸ لكل x من $[0; +\infty[$ نضع: $I(x) = \displaystyle\int_{-x}^{0} \frac{(x+t)^2}{2} e^t \, \mathrm{d}t$.

(أ) بين أن لكل x من $]0;+\infty[$ لدينا: $0 \leqslant I(x) \leqslant \dfrac{x^3}{6}$. (0,5 pt)

(ب) باستعمال مكاملة بالأجزاء مرتين ، بين أن : $(\forall x \geqslant 0) : I(x) = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - e^{-x}$

و أن : $(\forall x \geqslant 0) : -\dfrac{x^2}{2} \leqslant 1 - x - e^{-x} \leqslant \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^2}{2} \quad (1)$. (0,75 pt)

❹ نعتبر الدالة h المعرفة على $[0;+\infty[$ بما يلي: $\begin{cases} h(x) = \dfrac{1-e^{-x}}{x} \; ; \; x > 0 \\ h(0) = 1 \end{cases}$.

(أ) بين أن h قابلة للاشتقاق على يمين 0 . (استعمل (1)) (0,25 pt)

(ب) تحقق أن: $(\forall x \geqslant 0) : f(x) = 2h(2x) - h(x)$. (0,25 pt)

(ج) استنتج أن f قابلة للاشتقاق على يمين 0 . (0,25 pt)

❺ أعط جدول تغيرات الدالة f ثم أنشئ في المعلم $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$. (0,75 pt)

<u>**الجزء الثالث**</u> : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي: $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = \displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

❶ بين أن: $(\forall x \geqslant 0) : \; 0 \leqslant f(x) \leqslant e^{-x}$. (0,5 pt)

❷ (أ) استنتج أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) : \; 0 \leqslant u_n \leqslant 1$. (0,25 pt)

(ب) بين أن المتتالية (u_n) تزايدية و استنتج أنها متقاربة (0,5 pt)

❸ نعتبر الدالة H المعرفة على $[0;+\infty[$ بما يلي: $H(x) = \displaystyle\int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t$.

(أ) بين أن لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا : $u_n = H(2n) - H(n)$ و أن $u_n = \displaystyle\int_n^{2n} h(t)\,\mathrm{d}t$. (0,75 pt)

(ب) أثبت أن: $(\forall x \geqslant 1) : \; 0 \leqslant \dfrac{1}{x} - h(x) \leqslant e^{-x}$. (0,5 pt)

❹ استنتج أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) : \; 0 \leqslant \ln(2) - u_n \leqslant e^{-n}(1 - e^{-n})$. ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. (0,5 pt)

<u>**الجزء الرابع**</u> : نعتبر الدالة ψ المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي: $\begin{cases} \psi(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t \; ; \; x > 0 \\ \psi(0) = 1 \end{cases}$.

❶ بين أن: $(\forall x \in]0;+\infty[) : \; 1 - \dfrac{x}{4} \leqslant \psi(x) \leqslant 1 - \dfrac{x}{4} + \dfrac{x^2}{18}$. (0,5 pt)

❷ استنتج أن ψ متصلة في 0 ، و قابلة للاشتقاق على يمين 0 . (0,5 pt)

❸ بين أن: $(\forall x \in]1;+\infty[) : \; \displaystyle\int_1^x h(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \ln(x)$. و استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x)$. (0,5 pt)

❹ بين أن : $(\forall x \in]0;+\infty[) : \; \psi'(x) = \dfrac{1}{x^2}\left(1 - e^{-x} - H(x)\right)$. (0,5 pt)

❺ بين أن : $(\forall x \in [0;+\infty[) : \; H(x) \geqslant 1 - e^{-x}$. ثم أعط جدول تغيرات الدالة ψ . (0,75 pt)