

الإكاديمية الجهوية للتربية و التكوين
فاس بولمان - نيابة إقليم بولمان

دورة ماي 2010

مدة الإنجاز: 4 ساعات

$\frac{1}{3}$

الامتحان التجريبي

المادة: الرياضيات

المستوى: الثانية بكالوريا

الشعبة: العلوم الرياضية

التمرين الأول: (3 نقط)

نذكر أن $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة و $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

نضع: $M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a+b & 3b \\ b & a-b \end{pmatrix}$ و $J = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ و $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

نعتبر المجموعة: $E = \{M_{(a,b)} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$

1 (1) 0,5 بين أن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي جزئي من $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

0,5 (ب) بين أن (I, J) أساس للفضاء المتجهي E .

2 (1) 0,5 بين أن $J^2 \in E$ و استنتج أن: E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}), \times)$.

0,75 (ب) بين أن $(E, +, \times)$ حلقة تبادلية وواحدة

0,75 (ج) بين أن العنصر $M_{(a,b)}$ قاسم لصفري في E إذا وفقط إذا كان: $a^2 - 4b^2 = 0$.

التمرين الثاني: (4 نقط)

نعتبر في المجموعة \mathbb{C} المعادلة $(E): z^2 - az + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ حيث a عدد عقدي. ليكن z_0 و z_1 حلتي المعادلة (E) .

1 (1) 0,5 بين أن: $|z_0||z_1| = 1$ و $\arg(z_0) + \arg(z_1) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

2 (2) نضع $z_0 = e^{i\theta}$ حيث $\theta \in \mathbb{R}$.

1 (1) 0,5 بين أن: $a = 2 \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) e^{i\frac{\pi}{6}}$

0,5 (ب) استنتج أنه إذا كان $z_0 = i$ فإن: $1 + ia - a^2 - ia^3 + a^4 + ia^5 = 0$

3 (3) نفترض أن: $z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

1 (1) 0,75 حدد العدد z_1 على شكله المثلثي و الجبري، ثم استنتج قيمتي $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

0,5 (ب) أكتب العدد a على شكله المثلثي و الجبري.

4 (4) نعتبر التحويل R الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ حيث: $z' = iz + \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$. نعتبر النقط

$A(a)$ و $B(b)$ و $C(c)$ حيث: $a = e^{i\frac{\pi}{12}}$ و $b = e^{i\frac{\pi}{4}}$ و $C = R(B)$

1 (1) 0,5 بين أن R دوران محدد مركزه وزاوية.

0,25 (ب) تحقق أن $c - a = i(b - a)$

0,5 (ج) نضع $D = R(C)$. بين أن A منتصف القطعة $[BD]$.

التمرين الثالث: (3 نقط)

- (I) بين أن مجموعة حلول المعادلة: $27x - 31y = 1$ في \mathbb{Z}^2 هي: $\{(31k - 8, 27k - 7) / k \in \mathbb{Z}\}$. 1
- (II) نعتبر المجموعة: $E = \{0, 1, 2, \dots, 30\}$. 0,5
- (1) حدد العدد a من E الذي يحقق: $27a \equiv 1 [31]$. 0,5
- (2) ليكن f التطبيق من E نحو E الذي يربط كل عنصر n من E بباقي قسمة العدد $27n + 4$ على 31. 0,5
- (1) بين أن $\forall (n, m) \in E^2 : f(n) = f(m) \Rightarrow n = m$. 0,5
- (ب) ليكن m من E . حدد n من E بحيث $f(n) = m$. (يمكنك استعمال 1) 0,5
- (ج) استنتج أن التطبيق f تقابلي وحدد تقابله العكسي f^{-1} . 0,5

مسألة: (10 نقط)

الجزء الأول لنكن f الدالة العددية المعرفة على $[-1; +\infty[$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = (x+1)e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} ; x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[\\ f(-1) = 1 ; f(0) = e \end{cases}$$

و (C_f) منحنى f في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

(1) (1) بين أن: $f(x) = e^{\frac{(x+1)\ln(x+1)}{x}}$; $(\forall x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[)$ 0,25

(ب) أدرس اتصال الدالة f في الصفر و على اليمين في -1. 0,5

(2) (1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ 0,5

(ب) بين أن: $f(x) - x = x \left(e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} - 1 \right) + e^{\frac{\ln(x+1)}{x}}$; $(\forall x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[)$ 0,25

(ج) استنتج الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$. 0,5

(3) بين أن: $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = +\infty$ ثم أول هندسيا النتيجة. (يمكن استعمال السؤال 1) ووضع 0,5

(. $t = x+1$

(4) (1) بين أن: $\int_0^x \frac{t^2}{1+t} dt = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2$; $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ 0,5

(ب) بين أن: $\frac{t^2}{1+t} \leq 2t^2$; $(\forall t \geq -\frac{1}{2})$ 0,25

(ج) بين أن: $\left| \int_0^x \frac{t^2}{1+t} dt \right| \leq \frac{2}{3}|x|^3$; $(\forall x \geq -\frac{1}{2})$ 0,5

- (ح) استنتج أن: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}$ 0,25
- (أ) استنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق في 0 وأن $f'(0) = \frac{e}{2}$ 0,5
- (5) أدرس تغيرات الدالة g حيث $g(x) = x - \ln(x+1)$ و استنتج أن: $g(x) \geq 0$; $(\forall x > -1)$ 0,25
- (ب) بين أن: $f'(x) = \frac{(x+1)g(x)}{x^2} e^{\frac{\ln(x+1)}{x}}$; $(\forall x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[)$ 0,5
- (ج) ضع جدول تغيرات الدالة f 0,25
- (6) أنشئ المنحنى (C_f) 1

الجزء الثاني نعتبر الدالة F المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي: $F(x) = \int_0^x f(xt) dt$

- (1) بين أن: $(\forall x \in \mathbb{R}^+) : f(x) \geq x$ 0,25
- (ب) استنتج أن: $F(x) \geq \frac{x}{2}$; $(\forall x \geq 0)$ 0,25
- (ج) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ 0,25
- (2) بين أن: $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$; $(\forall x \in]0; +\infty[)$ 0,5
- (ب) بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ و أن: 0,5
- $(\forall x \in]0; +\infty[) : F'(x) = \frac{1}{x}(f(x) - F(x))$
- (ج) بين أن: $e \leq F(x) \leq f(x)$; $(\forall x \in]0; +\infty[)$ 0,25
- (د) استنتج أن F تزايدية على \mathbb{R}^+ 0,25

الجزء الثالث نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بما يلي: $u_n = \int_0^1 f\left(\frac{t}{n}\right) dt$

- (1) بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ تناقصية . 0,25
- (ب) بين أن: $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n \geq e$ 0,25
- (2) بين أن: $u_n = n \int_0^{\frac{1}{n}} f(t) dt$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$ 0,25
- (ب) استنتج أن: $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n \leq f\left(\frac{1}{n}\right)$ 0,25
- (ج) أحسب $\lim u_n$ 0,25