المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2013
الموضوع

NS24

4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	الشعبة أو المسلك

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من ثلاثة تمارين ومسألة مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين والمسألة حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالبنيات الجبرية..................(3.5ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالأعداد العقدية.....................(3.5ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالحسابيات..........................(3ن)
- المسألة تتعلق بالتحليل......................................(10ن)

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول : (3.5 نقط)

نذكر أن $(\mathbb{Z},+,\times)$ حلقة واحدية تبادلية و كاملة .

1- نزود $\mathbb{Z}$ بقانون التركيب الداخلي $*$ المعرف بما يلي: $x*y=x+y-2 \ ; \ \left(\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2\right)$

0.5 أ) بين أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي .

0.25 ب) بين أن $(\mathbb{Z},*)$ يقبل عنصرا محايدا يتم تحديده.

0.5 ج) بين أن $(\mathbb{Z},*)$ زمرة تبادلية .

2- نزود $\mathbb{Z}$ بقانون التركيب الداخلي T المعرف بما يلي: $x\mathrm{T}y=xy-2x-2y+6 \ ; \ \left(\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2\right)$

ونعتبر التطبيق f من $\mathbb{Z}$ نحو $\mathbb{Z}$ المعرف بما يلي: $f(x)=x+2 \ ; \ (\forall x\in\mathbb{Z})$

0.5 أ) بين أن التطبيق f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{Z},\times)$ نحو $(\mathbb{Z},\mathrm{T})$

0.25 ب) بين أن: $(x*y)\mathrm{T}z=(x\mathrm{T}z)*(y\mathrm{T}z) \ ; \ \left(\forall(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3\right)$

0.75 3- استنتج من كل ما سبق أن $(\mathbb{Z},*,\mathrm{T})$ حلقة تبادلية و واحدية.

0.25 4- أ) بين أن: $x\mathrm{T}y=2$ إذا و فقط إذا كان $x=2$ أو $y=2$

0.25 ب) استنتج أن الحلقة $(\mathbb{Z},*,\mathrm{T})$ كاملة .

0.25 ج) هل $(\mathbb{Z},*,\mathrm{T})$ جسم ؟(علل جوابك)

التمرين الثاني: (3.5 نقط)

I - ليكن a عددا عقديا غير منعدم

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(E):\quad 2z^2-\left(3+i\sqrt{3}\right)az+\left(1+i\sqrt{3}\right)a^2=0$

0.25 1- تحقق أن مميز المعادلة (E) هو: $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^2a^2$

0.5 2- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E)

II- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط A و B و M التي ألحاقها على التوالي a و $b=ae^{i\frac{\pi}{3}}$ و z

ليكن r الدوران الذي مركزه M وزاويته $\frac{\pi}{3}$

نضع : $A_1=r^{-1}(A)$ و $B_1=r(B)$ (حيث r^{-1} هو الدوران العكسي للدوران r)

ليكن a_1 و b_1 لحقي A_1 و B_1 على التوالي .

0.5 1- تحقق أن المثلث OAB متساوي الأضلاع.

0.5 2- أ) بين أن : $a_1=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$ و $b_1=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

0.5 ب) بين أن الرباعي OA_1MB_1 متوازي الأضلاع.

3- نفترض أن $M\neq A$ و $M\neq B$

0.5 أ) بين أن: $\frac{z-b_1}{z-a_1}=-\frac{z-b}{z-a}\times\frac{a}{b}$

0.75 ب) بين أن النقط M و A_1 و B_1 مستقيمية إذا و فقط إذا كانت النقط M و O و A و B متداورة.

التمرين الثالث: (3 نقط)

الهدف من التمرين هو البحث عن الأعداد الصحيحة الطبيعية n الأكبر قطعا من 1 و التي تحقق الخاصية :

$$(R):\ 3^n-2^n\equiv 0\ [n]$$

1- نفترض أن n يحقق الخاصية (R) و ليكن p أصغر قاسم أولي موجب للعدد n

0.75 أ) بين أن : $3^n-2^n\equiv 0\ [p]$ ثم استنتج أن $p\geq 5$

0.5 ب) بين أن: $2^{p-1}\equiv 1\ [p]$ و $3^{p-1}\equiv 1\ [p]$

0.5 ج) بين أنه يوجد زوج (a,b) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث: $an-b(p-1)=1$

0.5 د) ليكن r و q باقي و خارج القسمة الاقليدية للعدد a على $p-1$

$(a=q(p-1)+r$ حيث: $0\leq r<p-1$ و $q\in\mathbb{Z})$

بين أنه يوجد عدد صحيح طبيعي k بحيث : $rn=1+k(p-1)$

0.75 2- استنتج من كل ما سبق أنه لا يوجد عدد صحيح طبيعي n أكبر قطعا من 1 يحقق الخاصية (R)

مسألة: (10 نقط)

نعتبر الدالة العددية h المعرفة على المجال $[1,+\infty[$ بما يلي: $h(1)=1$ و $(\forall x>1)\ ;\ h(x)=\frac{x-1}{x\ln x}$

الجزء الأول:

0.25 1- أ) بين أن الدالة h متصلة على اليمين في 1

0.75 ب) بين أن: $(\forall x>1);\ \ln x<x-1$ ثم استنتج أن الدالة h تناقصية قطعا على المجال $]1,+\infty[$

0.5 2- أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة h

0.25 ب) استنتج أن: $(\forall x\geq 1);\ 0<h(x)\leq 1$

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $[1,+\infty[$ بما يلي: $g(1)=\ln 2$ و $(\forall x>1)\ ;\ g(x)=\int_x^{x^2}\frac{1}{\sqrt{t}\ln t}dt$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة g في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1- أ) تحقق أن : $(\forall x>1)\ ;\ \int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln t}dt=\ln 2$	0.25
ب) تحقق أن : $(\forall x>1)\ ;\ g(x)-\ln 2=\int_x^{x^2}\frac{\sqrt{t}-1}{t\ln t}dt$	0.25
ج) بين أن : $(\forall x>1)\ ;\ g(x)-\ln 2=\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{t-1}{t\ln t}dt$	0.5
2- أ) بين أن: $(\forall x>1)\ ;\ \left(x-\sqrt{x}\right)h(x)\leq g(x)-\ln 2\leq\left(x-\sqrt{x}\right)h\left(\sqrt{x}\right)$	0.5
ب) استنتج أن الدالة g قابلة للاشتقاق على اليمين في 1	0.5
ج) بين أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ و أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=0$	0.75
3- أ) بين أن الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]1,+\infty[$ و أن: $(\forall x>1)\ ;\ g'(x)=\frac{1}{2}h\left(\sqrt{x}\right)$	0.75
ب) استنتج أن: $(\forall x\geq 1)\ ;\ 0<g'(x)\leq\frac{1}{2}$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة g	0.5
ج) أنشئ المنحنى (C)	0.5

الجزء الثالث:

I- 1- بين أن الدالة $k:x\mapsto g(x)-x+1$ تقابل من المجال $[1,+\infty[$ نحو المجال $]-\infty,\ln 2]$	0.5
2- استنتج أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]1,+\infty[$ بحيث : $1+g(\alpha)=\alpha$	0.25
II- نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي: $1\leq u_0<\alpha$ و $(\forall n\geq 0)\quad u_{n+1}=1+g(u_n)$	
1- أ) بين أن: $(\forall n\geq 0)\quad ;\quad 1\leq u_n<\alpha$	0.5
ب) بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تزايدية قطعا.	0.5
ج) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة و أن: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\alpha$	0.75
2- أ) بين أن: $(\forall n\geq 0)\ ;\ \lvert u_{n+1}-\alpha\rvert\leq\frac{1}{2}\lvert u_n-\alpha\rvert$	0.5
ب) بين أن: $(\forall n\geq 0)\ ;\ \lvert u_n-\alpha\rvert\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n\lvert u_0-\alpha\rvert$	0.5
ج) استنتج مرة ثانية أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\alpha$	0.25

انتهى

Prof: Yassine Mghazli - Essaouira
Pour le site: ammarimaths