A propos du problème de Fermat

Srhiri-MEN-Maroc-2000

1. Introduction

Certains ouvrages de géométrie utilisent une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ pour la résolution du problème de Fermat . Cependant, ils ne présentent pas généralement les raisons de cette utilisation . La rotation utilisée offre , sans doute , une solution concise , mais , s'avère-t-elle un outil distinctif ? « Certes on peut utiliser une rotation pour résoudre le problème de Fermat mais , en règle générale , on est plutôt démuni face à ce type de question »[6]
Peut-on alors procéder autrement ?
La solution que je propose est un peu longue , toutefois elle ne fait pas appel à la notion de rotation .

2. Enoncé du problème de Fermat

« ABC est un triangle . Existe-t-il un point M du plan (ABC) telle que la somme $MA+MB+MC$ *soit minimale ? »*

3. Solution proposée

3.1. Position du point M

Montrons d'abord que si *M* existe alors il n'est pas à l'extérieur du triangle *ABC* .
Supposons que *M* se trouve sur le demi-plan de frontière *(BC)* et ne contenant pas le point *A*.
si *H* est la projection orthogonale de M sur la droite *(BC)* (fig1)
alors $HB < MB$ et $HC < MC$ de plus $HA < MA$ car l'angle $\widehat{MHA}$ est obtus ; donc si on pose :
$f(N) = NA + NB + NC$ pour tout point N du plan *(ABC)*
on obtient $f(H) < f(M)$
ce qui montre que *M* ne peut pas être à l'extérieur du triangle *ABC*.
M se trouve alors à l'intérieur du triangle *ABC* ou sur ses côtés .

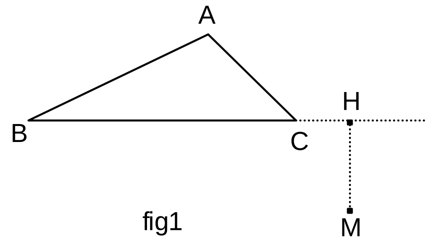

fig1

Notons que si *N* est un point intérieur au triangle *ABC* alors les droites *(AN)* , *(BN)* et *(CN)* coupent respectivement les segments [*BC*] , [*CA*] et [*AB*] en *A'*, *B'* et *C'* (fig2)
On peut alors considérer les coordonnées barycentriques α , β et γ du point *N* et les prendre positifs en choisissant *ABC* un triangle direct .
On aura donc : $\overrightarrow{NA} = (1-\alpha)\overrightarrow{A'A}$;
$\overrightarrow{NB} = (1-\beta)\overrightarrow{B'B}$ et $\overrightarrow{NC} = (1-\gamma)\overrightarrow{C'C}$
Par suite : $f(N) = (1-\alpha)AA' + (1-\beta)BB' + (1-\gamma)CC'$

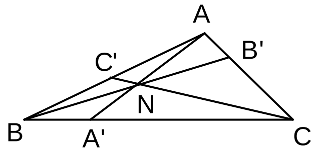

fig2

3.2. Cas d'un triangle équilatéral

Pourquoi ce cas particulier ?
D'une part, le triangle équilatéral possède des propriétés particulières, d'autre part, examiner des cas particuliers constitue, parfois, une partie majeure dans les procédés heuristiques.
Soit *ABC* un triangle équilatéral (direct) et *N* un point non extérieur au triangle *ABC*.
Envisageons les deux cas : *N* est sur *ABC* et *N* est intérieur à *ABC* .

3.2.1 *N* est sur le triangle *ABC* (fig3)

Supposons par exemple que $N \in [BC]$, et considérons I le milieu de [*BC*] et *O* le centre de gravité du triangle *ABC*.

On a $AB > AI$ et $AN \geq AI$ donc $AB + AN > 2AI$

Or $AB = BC = BN + NC$ et $2AI = 3OA$

Par conséquent $BN + NC + AN > 3OA$ i.e $f(N) > f(O)$

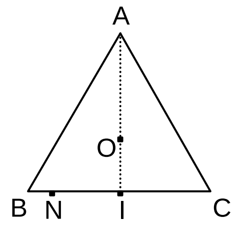

fig3

3.2.2 *N* est intérieur au triangle *ABC* (fig4)

D'après **3.1** $f(N) = (1-\alpha)AA' + (1-\beta)BB' + (1-\gamma)CC'$

Or $AA' \geq AI$ donc $AA' \geq \frac{3}{2}OA$

De même $BB' \geq \frac{3}{2}OB$ et $CC' \geq \frac{3}{2}OC$

Il s'ensuit que $f(N) \geq \frac{3}{2}(1-\alpha)OA + \frac{3}{2}(1-\beta)OB + \frac{3}{2}(1-\gamma)OC$

donc $f(N) \geq \frac{3}{2}(1-\alpha+1-\beta+1-\gamma)OA$ car $OA = OB = OC$

et puisque $\alpha+\beta+\gamma = 1$ alors $f(N) \geq 3OA$ d'où $f(N) \geq f(O)$

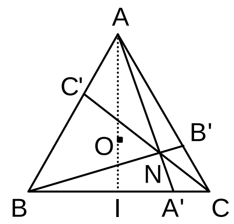

fig4

Le point M cherché , dans ce cas , est le point O centre de gravité de ABC

remarque : $\widehat{BOA} = \widehat{AOC} = \widehat{COB} = \frac{2\pi}{3}$

3.3. Cas d'un triangle dont les angles sont inférieurs à $\frac{2\pi}{3}$

3.3.1 Recherche du point *M*

L'étude faite en **3.2** nous emmène à se demander si le point *M* (lorsqu'il existe) est caractérisé par : $\widehat{BMA} = \widehat{AMC} = \widehat{CMB} = \frac{2\pi}{3}$ (*i*)

remarque : les relations $\widehat{MAB} + \widehat{ABM} = \frac{\pi}{3}$, $\widehat{MBC} + \widehat{BCM} = \frac{\pi}{3}$ et $\widehat{MCA} + \widehat{CAM} = \frac{\pi}{3}$

entraînent que $\widehat{CAB}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCA}$ sont inférieurs à $\frac{2\pi}{3}$

(ceci justifie dans un sens le cas **3.3**)

3.3.2 Construction du point *M* (fig5)

Les égalités (*i*) montrent que *(BM)* est bissectrice de l'angle $\widehat{AMC}$ donc si *B'* est le 2° point d'intersection de la droite *(BM)* et du cercle circonscrit au triangle *MAC* alors $\widehat{AMB'} = \widehat{ACB'} = \frac{\pi}{3}$

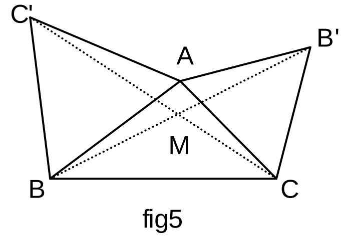

fig5

et $\widehat{B'MC} = \widehat{B'AC} = \frac{\pi}{3}$ ce qui prouve que le triangle *AB'C* est équilatéral.

Pour construire le point *M* , il suffit donc de construire deux triangles équilatéraux extérieurs sur les cotés du triangle *ABC* (par exemple *ABC'* et *AB'C*) *M* est alors le point d'intersection des droites *(BB')* et *(CC')*.

3.3.3 *f(M)* est-elle minimale ?

M étant le point définie par les relations (*i*)
Supposons que *MC=sup(MA,MB,MC)* et considérons le triangle équilatéral *CDE* dont *M* est le centre de gravité (fig6)
Soit *N* un point qui n'est pas extérieur au triangle *ABC*
N est aussi non extérieur au triangle *CDE* donc d'après **3.2**
$NC + ND + NE \geq MC + MD + ME$
par suite $NC + ND - AD + NE - BE \geq MC + MA + MB$
or $NA \geq ND - AD$ et $NB \geq NE - BE$
donc $NC + NA + NB \geq MC + MA + MB$
d'où $f(N) \geq f(M)$

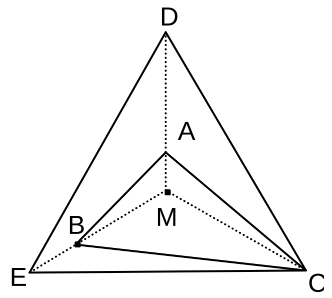

fig6

Le point M définie par les égalités (i) répond à la question posée

3.4. Cas d'un triangle ayant un angle supérieur ou égal à $\frac{2\pi}{3}$

3.4.1 *ABC* est un triangle ayant un angle égal à $\frac{2\pi}{3}$

Supposons $\widehat{CAB} = \frac{2\pi}{3}$ et $AC \geq AB$ (fig7)
On construit le triangle équilatéral *CDE* dont le centre de gravité est *A*.
Tout point *N* extérieur à *ABC* est aussi non extérieur au triangle *CDE*.
D'après **3.2** $NC + ND + NE \geq AC + AD + AE$
par suite $NC + ND - AD + NE - BE \geq AB + AC$
or $NA \geq ND - AD$ et $NB \geq NE - BE$
donc $NC + NA + NB \geq AB + AC$ d'où $f(N) \geq f(A)$

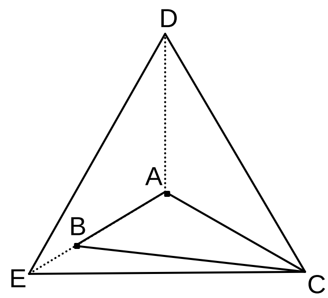

fig7

3.4.2 *ABC* est un triangle ayant un angle supérieur à $\frac{2\pi}{3}$

Supposons $\widehat{CAB} > \frac{2\pi}{3}$ (fig8)

On construit les points *B'* et *C'* tels que $\widehat{CAB'} = \widehat{C'AB} = \frac{2\pi}{3}$,

AB = AB' et *AC = AC'*
Si *N* est un point non extérieur au triangle *ABC* alors
il est non extérieur au triangle *ABC'* ou bien au triangle *AB'C* .
Supposons que *N* est non extérieur au triangle *ABC'*
donc d'après **3.4.1** $NA + NB + NC' \geq AB + AC'$
mais *AC = AC'* et $NC \geq NC'$ car *N* est situé sur le demi-plan de frontière (*AC'*) et ne contenant pas *C*
Par conséquent $NC + NA + NB \geq AB + AC$
d'où $f(N) \geq f(A)$
De même si *N* est non extérieur au triangle *AB'C* cette inégalité est réalisée .

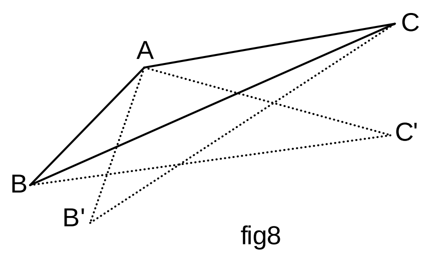

fig8

3.5 conclusion

La réponse au problème de Fermat est affirmative:

- si tous les angles du triangle ABC sont inférieurs à $\frac{2\pi}{3}$ alors M est le point d'intersection des droites *(BB')* et *(CC')* où *ABC'* et *AB'C* sont deux triangles équilatéraux extérieurs construits sur les cotés de ABC

- si le triangle ABC admet un angle supérieur ou égal à $\frac{2\pi}{3}$ alors le point M est l'un des sommets de ABC .

Remarques *:*

-La méthode proposée révèle également le secret de la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$

- Le point M est parfois appelé point de Torricelli (interprétation physique)

- Les nombres complexes constituent aussi un outil pertinent pour résoudre le problème de Fermat [2] .

Bibliographie

[1] Coxeter . HSM , Greitzer. SL : Redécouvrons la géométrie , Traduit par Marchand , Dunod , Paris, 1971

[2] Deschamps.C , Odoux .J , Ramis. E : Cours de mathématiques spéciales , Algèbre , Masson , Paris 1979

[3] Mailos .L : A propos des cercles et des triangles, IREM de Toulouse, 1982

[4] Sénachal .B : Géométrie classique et mathématiques modernes, Hermann , Paris , 1979

[5] Sortais R , Sortais.Y :La géométrie du triangle ,Hermann , Paris , 1987

[6] Truffaut.B : Inégalités géométriques, IREM des pays de la Loire , 1992