السنة الدراسية: 2012/2011

أولمبياد الرياضيات 2012

الفرض الأول

الجمعة 02 دجنبر 2011

- حلول مقترحة -

من اقتراح: أذ سمير لخريسي

تمرين 1

طريقة1

لنبين أن $\frac{2c}{a}+\frac{c}{b}\geq\sqrt{3}$ حيث $2a^2+b^2=9c^2$ و a و b و a و أعدادا حقيقية موجبة قطعا

نعلم أن $\forall(x,y,z)\in IR^{+3}\quad x+y+z\geq 3\sqrt[3]{xyz}$

إذن : $9c^2=a^2+a^2+b^2\geq 3\sqrt[3]{a^4b^2}$ أي : $3c^2\geq\left(\sqrt[3]{a^2b}\right)^2$ منه: $c\geq\frac{\sqrt[3]{a^2b}}{\sqrt{3}}$

أيضا لدينا: $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b}}$

بالتالي: $\frac{2c}{a}+\frac{c}{b}=c\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq\frac{3\sqrt[3]{a^2b}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{a^2b}}=\sqrt{3}$

تمرين 2

نعتبر المعادلة $p(x)=x^4-2011x^2+n$

و نفترض أن كل جذورها أعداد صحيحة

نعتبر الحدودية: $q(x)=x^2-2011x+n$

محددة الحدودية: هي: $\Delta=2011^2-4n$

إذا كان $\Delta<0$ أي $n>\left(\frac{2011}{2}\right)^2$ فليس للحدودية q أي جذور و بذلك لن تكون للحدودية p جذور

الحالة $\Delta=0$ غير ممكنة لأن Δ عدد صحيح فردي

ذا كان $\Delta>0$ أي $n<\left(\frac{2011}{2}\right)^2$ فإن للحدودية جذران مختلفان $\alpha=\frac{2011+\sqrt{\Delta}}{2}$ و $\beta=\frac{2011-\sqrt{\Delta}}{2}$

بما أن $\alpha>0$ و $\beta\geq 0$ (لأن: $\sqrt{\Delta}\leq 2011\quad\Rightarrow\quad\Delta=2011^2-4n\leq 2011^2$)

- إذا كان $\frac{2011-\sqrt{\Delta}}{2}\geq 0$ أي

فسيكون للحدودية q أربعة جذور هي:

$$a=\sqrt{\frac{2011+\sqrt{\Delta}}{2}}\ \text{و}\ b=-\sqrt{\frac{2011+\sqrt{\Delta}}{2}}\ \text{و}\ c=\sqrt{\frac{2011-\sqrt{\Delta}}{2}}\ \text{و}\ d=-\sqrt{\frac{2011-\sqrt{\Delta}}{2}}$$

إذا افترضنا أن كل هذه الجذور صحيحة فإن: $\alpha=\frac{2011+\sqrt{\Delta}}{2}=a^2$ و $\beta=\frac{2011-\sqrt{\Delta}}{2}=c^2$

منه: $\alpha+\beta=2011=a^2+c^2$ أي أن العدد 2011 يمكن كتابته على شكل مجموع مربعين كاملين

و هذا غير ممكن(يمكن حساب : $2011-k^2$ حيث $k\in\{1,2,\ldots,44\}$ و لن نجد أي مربع كامل في النتيجة)

تمرين 3

لدينا $f\left(x-f\left(\frac{x}{y}\right)\right)=x\,f\left(1-f\left(\frac{1}{y}\right)\right)$ $(*)$ ، **نضع:** $f(1-f(1))=a$ **إذن:** $a\neq 0$

نأخذ: $y=1$ **نجد:** $f(x-f(x))=x\,f(1-f(1))\quad \forall x\in IR$

أي: $f(x-f(x))=a\,x\quad \forall x\in IR\quad (**)$ **أو أيضا:** $f\left(\frac{x}{a}-f\left(\frac{x}{a}\right)\right)=x\quad \forall x\in IR\quad (***)$

لنبين أن: $f(x)=0 \Rightarrow x=0$

لدينا: $f(x)=0 \Rightarrow f(x-0)=a\,x \Rightarrow 0=a\,x \Rightarrow x=0\ (car\ a\neq 0)$

الآن من العلاقة $(***)$ **نستنتج أن:** $f(0-f(0))=0$ **منه و حسب الاستلزام السابق :** $f(0)=0$

إذن: $f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

حسب العلاقة $(***)$ **نستنتج أن:** $f\left(\frac{1}{a}-f\left(\frac{1}{a}\right)\right)=1$ ، **نضع:** $\frac{1}{a}-f\left(\frac{1}{a}\right)=\beta$ **منه:** $f(\beta)=1$

حسب التكافؤ السابق:، و لكون $f(\beta)\neq 0$ **فإن** $\beta\neq 0$

إذن بأخذ : $y=\frac{1}{\beta}$ **في العلاقة** $(*)$ **نجد:** $f(x-f(\beta\,x))=x\,f(1-f(\beta))=x\,f(0)=0\quad \forall x\in IR$

و منه و حسب التكافؤ السابق : $f(\beta\,x)=x\quad \forall x\in IR$ **أو أيضا** $f(x)=\frac{x}{\beta}\quad \forall x\in IR$

عكسيا نعوض في المتساوية $(*)$ **فنجد:**

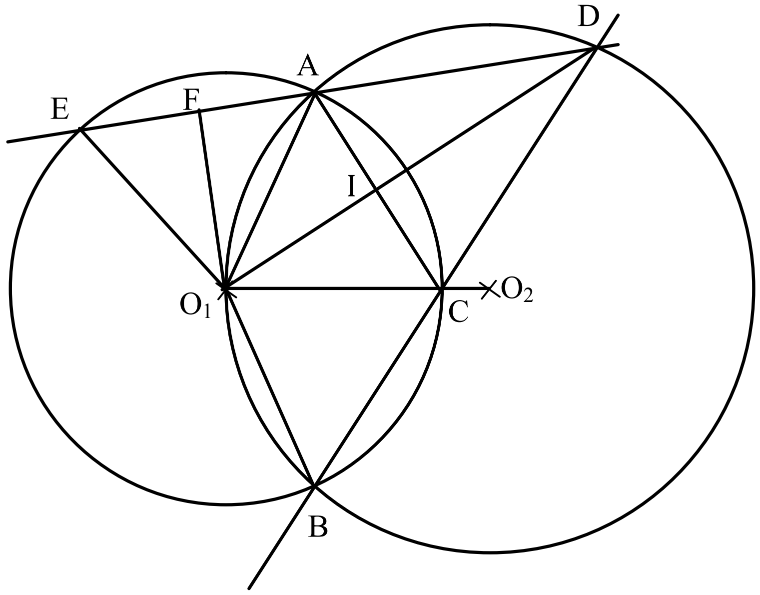
$$f\left(x-f\left(\frac{x}{y}\right)\right)=f\left(x-\frac{x}{\beta\,y}\right)=\frac{x\left(1-\frac{1}{\beta\,y}\right)}{\beta}\quad \text{و}\quad x\,f\left(1-f\left(\frac{1}{y}\right)\right)=x\,f\left(1-\frac{1}{\beta\,y}\right)=x\frac{1-\frac{1}{\beta\,y}}{\beta}$$

بالتالي الدوال الوحيدة التي تحقق العلاقة المطلوبة هي جميع الدوال الخطية التي معاملها غير منعدم.

رياضيـــات النجــــــــاح

www.naja7math.com

تمرين 4



بما أن $O_1A=O_1B$ و $O_2A=O_2B$ فإن (O_1O_2) واسط $[AB]$

و بما أن $C\in(O_1O_2)$ فإن: $AC=BC$

من جهة أخرى $A\hat{D}O_1$ و $B\hat{D}O_1$ زاويتان محيطيتان في الدائرة (κ_2) تحصران قوسين متقايسين

إذن: $A\hat{D}O_1 = B\hat{D}O_1 \quad (1)$

الرباعي $ADBO_1$ محدب و دائري ، إذن:

$O_1\hat{A}D=\pi-O_1\hat{B}D$

و بما أن: $O_1\hat{B}D=O_1\hat{B}C=O_1\hat{C}B$

منه: $O_1\hat{A}D=\pi-O_1\hat{C}B=O_1\hat{C}D \quad (2)$

من (1) و (2) نستنتج أن: $A\hat{O}_1D=C\hat{O}_1D \quad (*)$

إذن $[O_1D)$ منصف $A\hat{O}_1C$

و بما أن AO_1C متساوي الساقين فإن (O_1D) واسط AO_1C

الآن نعتبر التماثل المحوري ذو المحور (O_1D)

لدينا مماثل C هي A و مماثل D هي نفسها

إذن مماثل (CD) هو (AD)

و مماثل (κ_1) هي نفسها (لأن $O_1\in(O_1D)$)

بما أن $B\in(CD)$ و $B\in(\kappa_1)$

فإن B مماثلة B تحقق: $B\in(AD)$ و $B'\in(\kappa_1)$

أي أن: $B=E$

بالتالي: $AE=BC$

منه: $AE=AC$

إذن المثلثان O_1AC و O_1AE متقايسان

و بالتالي: $A\hat{O}_1F=A\hat{O}_1I \quad (**)$

و هذا ينهي البرهان