السنة الدراسية: 2011/2010

أولمبياد الرياضيات 2011

الفرض الأول

الجمعة 26 نونبر 2010

- حلول مقترحة -

من اقتراح: أذ سمير لخريسي

تمرين 1

طريقة1

لنبين أن $\dfrac{a}{b^2+4}+\dfrac{b}{a^2+4}\geq\dfrac{1}{2}$ حيث $a+b=ab$

نعلم أن: $(a+b)^2\geq 4ab$ منه: $ab^2\geq 4ab$ منه: $ab\geq 4$ منه: $\dfrac{1}{b^2+4}\geq\dfrac{1}{b^2+ab}$ و أيضا $\dfrac{1}{a^2+4}\geq\dfrac{1}{a^2+ab}$

منه: $\dfrac{a}{b^2+4}+\dfrac{b}{a^2+4}\geq\dfrac{a}{b^2+ab}+\dfrac{b}{a^2+ab}$

و لدينا:

$$\frac{a}{b^2+ab}+\frac{b}{a^2+ab}=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{a+b}+\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{a+b}=\frac{a}{b^2a}+\frac{b}{a^2b}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$$
$$=\frac{(a+b)^2-2ab}{a^2b^2}=\frac{a^2b^2-2ab}{a^2b^2}=1-\frac{2}{ab}$$

و بما أن: $ab\geq 4\ \Rightarrow 1-\dfrac{2}{ab}\geq\dfrac{1}{2}$ فإن: $\boxed{\dfrac{a}{b^2+4}+\dfrac{b}{a^2+4}\geq\dfrac{1}{2}}$

طريقة2:

نضع: $a+b=ab=t$

إذن:

$$\frac{a}{b^2+4}+\frac{b}{a^2+4}=\frac{a^3+4a+b^3+4b}{a^2b^2+4(a^2+b^2)+16}=\frac{(a+b)(a^2+b^2-ab)+4(a+b)}{a^2b^2+4((a+b)^2-2ab)+16}=\frac{(a+b)((a+b)^2-3ab)+4(a+b)}{a^2b^2+4(a+b)^2-8ab+16}$$
$$=\frac{t(t^2-3t)+4t}{t^2+4t^2-8t+16}=\frac{t^3-3t^2+4t}{5t^2-8t+16}$$

ذن للبرهان على المتفاوتة المطلوبة يجب البرهان على أن: $f(t)=2(t^3-3t^2+4t)-(5t^2-8t+16)\geq 0\qquad \forall t\geq 4$

لدينا: $f(t)=2t^3-11t^2+16t-16=(t-4)(2t^2-3t+4)\geq 0\qquad \forall t\geq 4$ و هذا ينهي البرهان

(لأن: محددة $2t^2-3t+4$ سالبة) (قمنا بإجراء القسمة الإقليدية للتعميل)

يمكن أيضا دراسة الدالة السابقة و الاستنتاج من خلال جدول التغيرات

تمرين 2

لتحل النظمة $(S):\begin{cases} x+y+z+t=4 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=5-\frac{1}{xyzt} \end{cases}$

نعلم أن: $\forall x>0\ x+\frac{1}{x}\geq 2$ ، منه: $(S)\Rightarrow x+y+z+t+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\geq 8 \Rightarrow 5-\frac{1}{xyzt}\geq 4 \Rightarrow xyzt\geq 1$

و من جهة أخرى :

$$x+y+z+t\geq 2\sqrt{xy}+2\sqrt{zt}\geq 2\sqrt{2\sqrt{xy}2\sqrt{zt}}=4\sqrt{\sqrt{xyzt}} \Rightarrow 4\geq 4\sqrt{\sqrt{xyzt}} \Rightarrow xyzt\leq 1$$

إذن: $xyzt=1$

منه:

$$(S)\Rightarrow \begin{cases} x+y+z+t=4 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=4 \end{cases} \Rightarrow x+\frac{1}{x}-2+y+\frac{1}{y}-2+z+\frac{1}{z}-2+t+\frac{1}{t}-2=0$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+\left(\sqrt{y}-\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2+\left(\sqrt{z}-\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2+\left(\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2=0 \Rightarrow x=y=z=t=1$$

عكسيا يمكن التحقق بسهولة من صحة الحل، بالتالي: $\boxed{S=\{(1;1;1;1)\}}$

تمرين 3

لدينا $\forall x\in IR\quad f(x)=\max_{y\in IR}(2xy-f(y))$

إذن: $\forall x\in IR\ \forall y\in IR\quad f(x)\geq 2xy-f(y)$

و بأخذ $(x=y)$ نجد: $\forall x\in IR\quad f(x)\geq 2x^2-f(x)$ منه: $\forall x\in IR\quad f(x)\geq x^2 \qquad (*)$

ليكن $x\in IR$ إذن يوجد $x_0\in IR$ حيث: $f(x)=2xx_0-f(x_0)$ منه: $f(x)-x^2=2xx_0-f(x_0)-x^2$

و حسب $(*)$ فإن: $f(x_0)\geq x_0^2$ منه: $f(x)-x^2\leq 2xx_0-x_0^2-x^2=-(x-x_0)^2$ منه: $f(x)\leq x^2$

بالتالي: $\forall x\in IR\quad f(x)=x^2$

وعكسيا بالنسبة للدالة $x\mapsto x^2$ لدينا: $\forall x\in IR\ \forall y\in IR\quad x^2\geq 2xy-y^2$

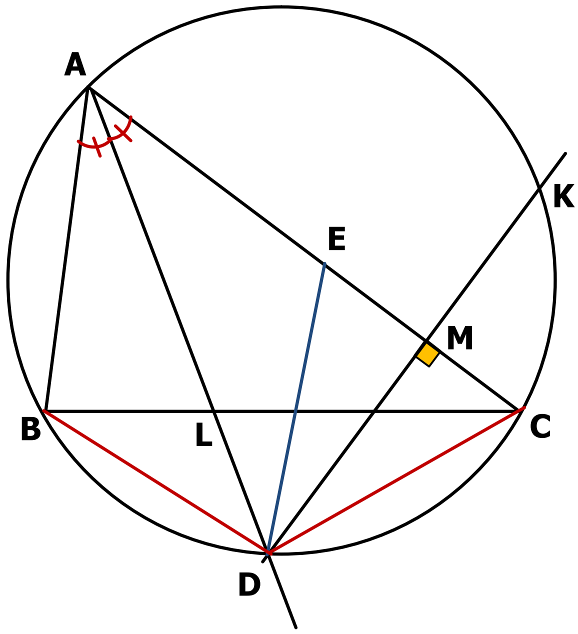
لأن: $\forall x\in IR\ \forall y\in IR\quad x^2-2xy+y^2\geq 0$

و $\forall x\in IR\ \exists y\in IR\quad x^2=2xy+y^2$

لأن محددة الحدودية $t^2+2xt-x^2=0\quad t\in IR$ هي: $\Delta=4x^2+4x^2=8x^2\geq 0$

و هذا يعني أن الدالة $\boxed{\forall x\in IR\quad f(x)=x^2}$ هي الدالة الوحيدة التي تحقق الشرط المطلوب.

تمرين 4



بما أن L هي نقطة تقاطع المنصف الداخلي للزاوية $\left[B\hat{A}C\right]$ مع $[BC]$ فإن: $\frac{BL}{LC}=\frac{AB}{AC}$

منه: $AC=2\,AB$

لنعتبر E منتصف $[AC]$ إذن: $AE=AB$

إذن نستنتج بسهولة أن المثلثان AED و ABD (ضلع مشترك و ضلعان متقايسان والزاوية المحصورة بينهما متقايسان)

منه: $\boxed{BD=DE}$

من جهة أخرى $B\hat{A}D$ و $D\hat{A}C$ زاويتان محيطيتان متقايستان إذن فهما تحصران قوسين متقايسين

منه: $\boxed{BD=DC}$

نستنتج إذن أن: $\boxed{DE=DC}$

إذن (DM) ارتفاع في المثلث DEC المتساوي الساقين في D إذن فهو أيضا متوسط و واسط

منه: $MC=\frac{EC}{2}=\frac{AC}{4}$

منه: $AM=AC-MC=\frac{3\,AC}{4}$ بالتالي: $\boxed{\frac{AM}{MC}=\frac{3}{4}}$