السنة الدراسية: 2008/2007

أولمبياد الرياضيات 2008

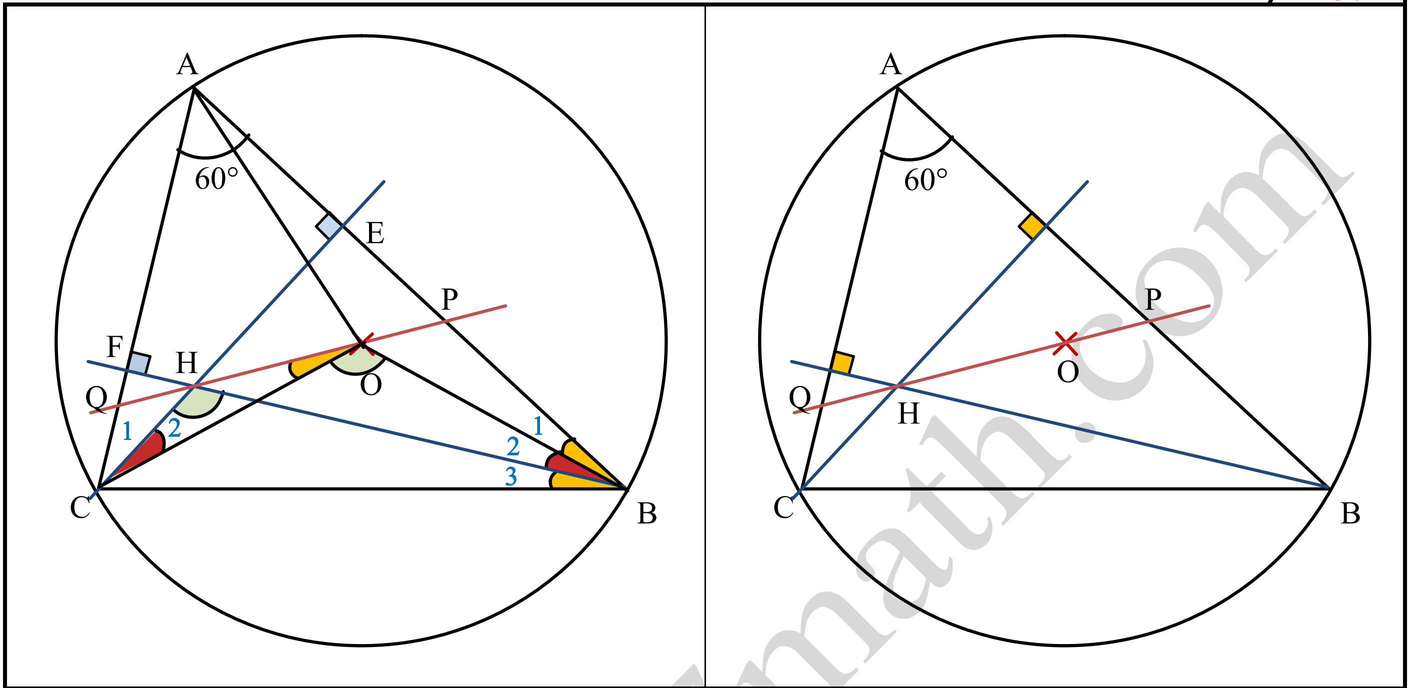
الفرض الأول

الجمعة 23 نونبر 2007

- حلول مقترحة -

من اقتراح: أذ سمير لخريسي

تمرين 1



للبرهان على النتيجة المطلوبة سنبين أن المثلثين BOP و COQ متقايسان.

لدينا $B\hat{O}C$ **هي الزاوية المركزية المرتبطة بالزاوية المحيطية** $B\hat{A}C$ **إذن:** $B\hat{O}C = 2B\hat{A}C = 120°$

ولدينا من جهة أخرى: $B\hat{H}C = E\hat{H}F = 360° - (90° + 90° + 60°) = 120°$

إذن: $B\hat{O}C = B\hat{H}C$ **إذن الرباعي** $BOHC$ **دائري، إذن:** $\hat{B}_2 = \hat{C}_2 \ (1)$ **و** $H\hat{O}C = \hat{B}_3 \ (2)$ **(زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس)**

من جهة أخرى لدينا: $F\hat{B}A = 180° - (90° + 60°) = 30°$ **منه:** $\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 30° \ (3)$

و بما أن OBC **متساوي الساقين فإن:** $O\hat{B}C = \frac{180 - B\hat{O}C}{2} = 30°$ **منه:** $\hat{B}_3 + \hat{B}_2 = 30° \ (4)$

من (3) **و** (4) **نستنتج أن:** $\hat{B}_3 = \hat{B}_1$ **و باستعمال** (2) **نستنتج أن:** $\boxed{(*) \ \ H\hat{O}C = \hat{B}_1}$

و لدينا: $\hat{C}_1 = 180° - (90° + 60°) = 30°$

إذن: $Q\hat{C}O = \hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 30° + \hat{B}_2$ **و** $P\hat{O}B = 180° - 120° - H\hat{O}C = 60° - \hat{B}_1 = 60° - (30° - \hat{B}_2) = 30° + \hat{B}_2$

إذن: $\boxed{(**) \ \ Q\hat{C}O = P\hat{O}B}$ **و لدينا:** $\boxed{(***) \ \ OB = OC}$

من $(*)$ **و** $(**)$ **و** $(***)$ **نستنتج أن:** BOP **و** COQ **متقايسان، إذن:** $OP = CQ$

و لدينا: $O\hat{Q}C = 180 - (\hat{C}_1 + \hat{C}_2 + Q\hat{O}C) = 180° - (30° + \hat{B}_2 + \hat{B}_3) = 180° - (30° + 30°) = 120°$

إذن: $Q\hat{H}C = 180° - (120° + 30°) = 30°$ **إذن:** QHC **مثلث متساوي الساقين منه:** $\boxed{QH = CQ = OP}$

يمكنك أيضا أن تبرهن أن AQP **مثلث متساوي الأضلاع و أن** $HP = PB$ **و أن:** $CQ + PB = QP$

تمرين 2

المعادلة $x^2+x+3=85$ تقبل حلين ، ليكن : $\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{329}}{2}$ أحدهما

المعادلة $x^2-3x+5=85$ تقبل حلين ، ليكن : $\beta=\dfrac{3-\sqrt{329}}{2}$ أحدهما

إذن: $\alpha^2=82-\alpha$ و $\beta^2=80+3\beta$ و $\beta+\alpha=1$

لدينا:
$$\begin{cases} f(\alpha^2+\alpha+3)+2\,f(\alpha^2-3\alpha+5)=6\alpha^2-10\alpha+17 \\ f(\beta^2+\beta+3)+2\,f(\beta^2-3\beta+5)=6\beta^2-10\beta+17 \end{cases}$$

منه:
$$\begin{cases} f(85)+2\,f(82-\alpha-3\alpha+5)=6(82-\alpha)-10\alpha+17 \\ f(80+3\beta+\beta+3)+2\,f(85)=6(80+3\beta)-10\beta+17 \end{cases}$$
منه:
$$\begin{cases} f(85)+2\,f(87-4\alpha)=509-16\alpha \\ f(83+4\beta)+2\,f(85)=497+8\beta \end{cases}$$

و بما أن: $83+4\beta=83+4(1-\alpha)=87-4\alpha$ فإن: $f(87-4\alpha)=f(83+4\beta)=497+8\beta-2\,f(85)$

منه: $f(85)+2(497+8\beta-2\,f(85))=509-16\alpha$ أي : $f(85)-4\,f(85)+994+16\beta=509-16\alpha$

منه: $-3\,f(85)=-485-16(\alpha+\beta)$ أي: $-3\,f(85)=-485-16\times1=-501$ بالتالي: $\boxed{f(85)=167}$

تمرين 3

نعلم أن: $x+y\geq 2\sqrt{xy}\quad x,y\geq 0\ \forall$ إذن: $\dfrac{a^2}{b}+b\geq 2a$ و $\dfrac{b^2}{c}+c\geq 2b$ و $\dfrac{c^2}{a}+a\geq 2c$

و بجمع المتفاوتات طرفا بطرف نجد: $\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}+a+b+c\geq 2(a+b+c)$

بالتالي: $\boxed{\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}\geq a+b+c}$

تمرين 4

بما أن الحدودية $p(x)=4x^4-12x^3-7x^2+22x+14$ تقبل 4 جذور حقيقية مختلفة فإن:

$$p(x)=4(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)=4\left(x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2\right)\left(x^2-(x_3+x_4)x+x_3x_4\right)$$

نضع: $p=x_1\,x_2$ و $q=x_3\,x_4$ و $s=x_3+x_4$

إذن:

$$p(x)==4\left(x^2-x+p\right)\left(x^2-sx+q\right)=4\left(x^4-sx^3+qx^2-x^3+sx^2-qx+px^2-psx+pq\right)$$

$$p(x)=4x^2-4(s+1)x^3+4(q+s+p)x^2-4(q+ps)x+4\,pq$$

منه: $\begin{cases} s+1=3 \\ q+s+p=\dfrac{-7}{4} \\ q+ps=\dfrac{-11}{2} \\ pq=\dfrac{7}{2} \end{cases}$ منه: $\begin{cases} s=2 \\ q+p=\dfrac{-15}{4} \\ q+2p=\dfrac{-11}{2} \\ pq=\dfrac{7}{2} \end{cases}$ منه: $\begin{cases} s=2 \\ q+p=\dfrac{-15}{4} \\ p=\dfrac{-11}{2}+\dfrac{15}{4}=\dfrac{-7}{4} \\ pq=\dfrac{7}{2} \end{cases}$ منه : $\begin{cases} s=2 \\ q=\dfrac{-15}{4}+\dfrac{7}{4}=-2 \\ p=\dfrac{-7}{4} \\ pq=\dfrac{7}{2} \end{cases}$

منه: $p(x)=4\left(x^2-x-\dfrac{7}{4}\right)\left(x^2-2x-2\right)$

بالتالي و بعد حل المعادلة $p(x)=0$ نجد: $\boxed{S=\left\{\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2};\dfrac{1-2\sqrt{2}}{2}\,;1+\sqrt{3}\,;1-\sqrt{3}\right\}}$