من انجاز الأستاذ علي تاموسيت

العدد الذهبي بين الجبر و الهندسة

تعريف و قيمة العدد الذهبي:

العدد الذهبي هو الحل الموجب للمعادلة: $x^2 - x - 1 = 0$ ، و نرمز لهذا العدد ب φ (phi) ، أي هو العدد $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

الخصائص الجبرية للعدد الذهبي:

مربع العدد الذهبي:

$$\varphi^2 = \varphi + 1 .$$

مقلوب العدد الذهبي:

$$\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1 .$$

أس العدد الذهبي:

$$\varphi^2 = \varphi + 1 \text{ ،}$$
$$\varphi^3 = \varphi \times \varphi^2 = \varphi \times (\varphi + 1) = \varphi^2 + \varphi = (\varphi + 1) + \varphi = 2\varphi + 1 \text{ ،}$$
$$\varphi^4 = 2\varphi^2 + \varphi = 2 \times (\varphi + 1) + \varphi = 3\varphi + 2 \text{ ،}$$
$$\varphi^5 = 3\varphi^2 + 2\varphi = 3 \times (\varphi + 1) + 2\varphi = 5\varphi + 3 \text{ ،}$$
$$\varphi^6 = 8\varphi + 5 \text{ ،}$$
$$\varphi^7 = 13\varphi + 8 \text{ ،}$$

ملاحظة:

إذا كان n عددا صحيحا طبيعيا أكبر من 2، فإن: $\varphi^n = \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2}$.

العدد الذهبي و الحساب المثلثي:

$$\cos(36^\circ) = \frac{\varphi}{2} \text{ و } \sin(18^\circ) = \frac{1}{2\varphi} .$$

القطعة الذهبية:

القطعة $[AC]$ مجزأة حسب مقطع ذهبي، إذا كان: $\frac{AC}{BC} = \frac{AB}{AC}$.

أي: $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$

ومنه: $a^2 = ab + b^2$

نقسم على b^2 : $\frac{a^2}{b^2} = \frac{ab+b^2}{b^2}$ ، أي: $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} + 1$

وبالتالي نحصل على: $\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{a}{b}\right) - 1 = 0$.

إذن: $\frac{a}{b} = \varphi$.

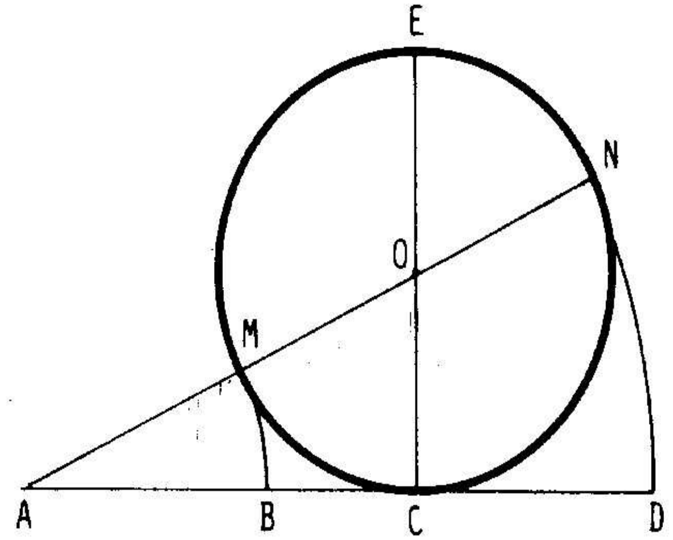
ومنه: $\varphi = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AC}{BC}$.

الإنشاء الهندسي للعدد الذهبي:

القطعة $[CE]$ عمودية على القطعة $[AC]$، بحيث: $AC = CE$.

O منتصف القطعة $[CE]$، المستقيم (OA) يقطع الدائرة التي قطرها $[CE]$ في النقطتين M و N.

على المستقيم (AC) ننشئ النقطتين B و D ، بحيث: $AN = AD$ و $AM = AB$.



لدينا: $AC^2 = AM \times AN$

أي: $AC^2 = AB \times AD$

إذن: $\varphi = \dfrac{AB}{BC} + \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AC}{AB}$.

المستطيل الذهبي:

المستطيل الذهبي هو مستطيل خارج طوله على عرضه مساو للعدد الذهبي.

الإنشاء الهندسي للمستطيل الذهبي:

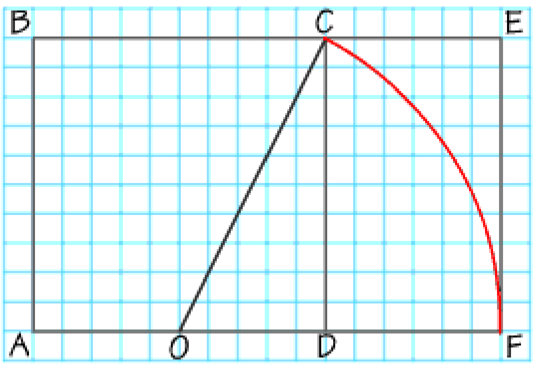
ليكن $ABCD$ مربعا و O منتصف القطعة $[AD]$.

نرسم قوسا من الدائرة التي مركزها O و شعاعها OC، يقطع المستقيم (AD) في النقطة F،

ننشئ النقطة E بحيث $ABEF$ مستطيل.

إذن: $ABEF$ مستطيل ذهبي.

أي: $\varphi = \dfrac{AF}{AB}$.



التعليل:

في المثلث OCD ، لدينا: $OC^2 = CD^2 + OD^2$

يعني : $OC^2 = AB^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2$

أي: $OC^2 = \frac{5}{4}AB^2$

إذن: $OC = \frac{\sqrt{5}}{2}AB$.

ولدينا: $AF = AO + OF$

أي: $AF = \frac{AB}{2} + OC$

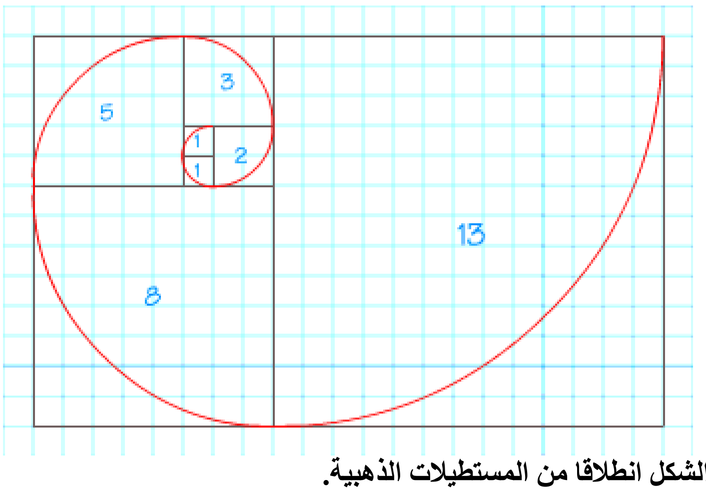
يعني: $AF = \frac{1}{2}AB + \frac{\sqrt{5}}{2}AB$

إذن: $AF = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)AB$

ومنه: $AF = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)AB$

و بالتالي: $\frac{AF}{AB} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \varphi$.

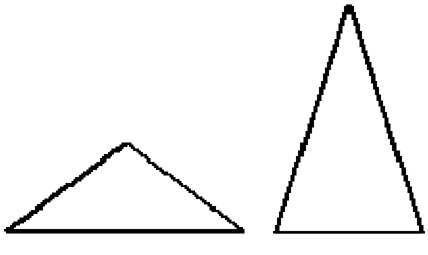
الحلـزون الـذهبي:



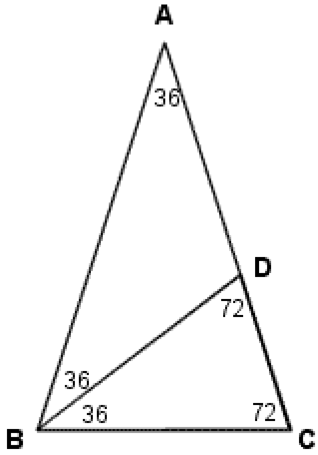
يمكن الحصول على هذا الشكل انطلاقا من المستطيلات الذهبية.

المثلث الذهبي:

المثلث الذهبي هو مثلث متساوي الساقين خارج طول ضلعيه مساو للعدد الذهبي.
و هناك حالتان ممكنتان للمثلث الذهبي، وهما:



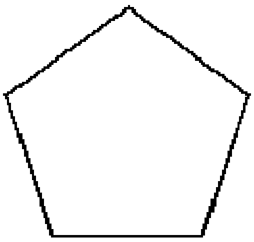
حالة تكون فيها الزاوية مساوية ل 72° ، و 36° بالنسبة للحالة الأخرى.
ويمكن الحصول على الحالتين معا باعتبار المنصف الداخلي (أنظر الشكل).



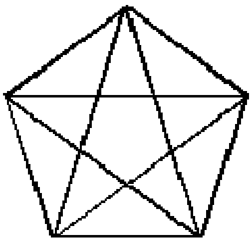
و لدينا إذن : $\frac{AB}{BC} = \varphi$.

العدد الذهبي و المخمس المنتظم:

المخمس المنتظم:

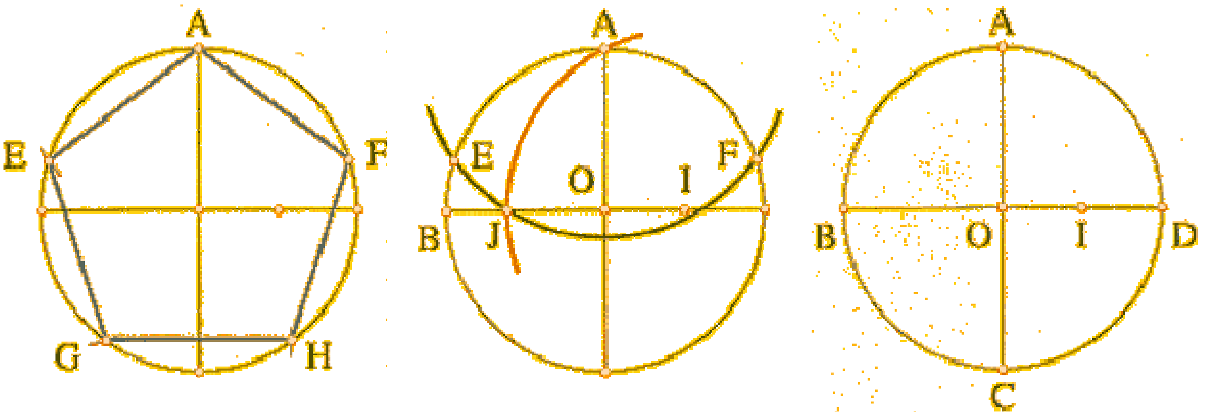


المخمس المنتظم هو مضلع له 5 أضلاع متقايسة محاط بدائرة [أي أن رؤوسه متداورة] و جميع الزوايا متقايسة.
الزاوية بين ضلعين متتابعين من المخمس المنتظم تساوي: 108°.
بالنسبة للمخمس المنتظم السابق (الشكل) يسمى أحيانا ب المخمس المنتظم المحدب.

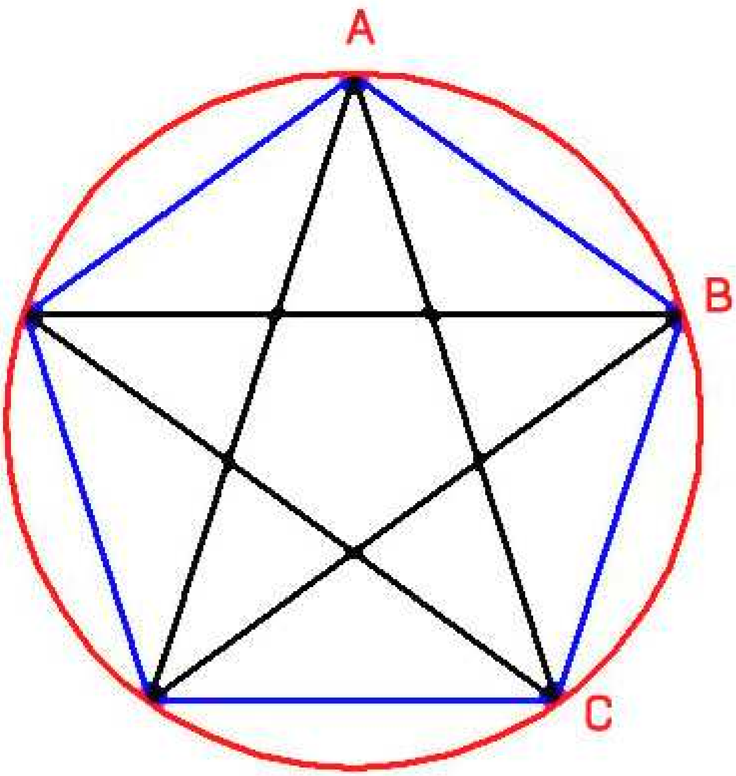


وبالنسبة لهذا الشكل الأخير نقول على المخمس المنتظم بأنه مخمس منتظم نجمي (النجمة الخضراء في رايتنا الوطنية).

إنشاء المخمس المنتظم:

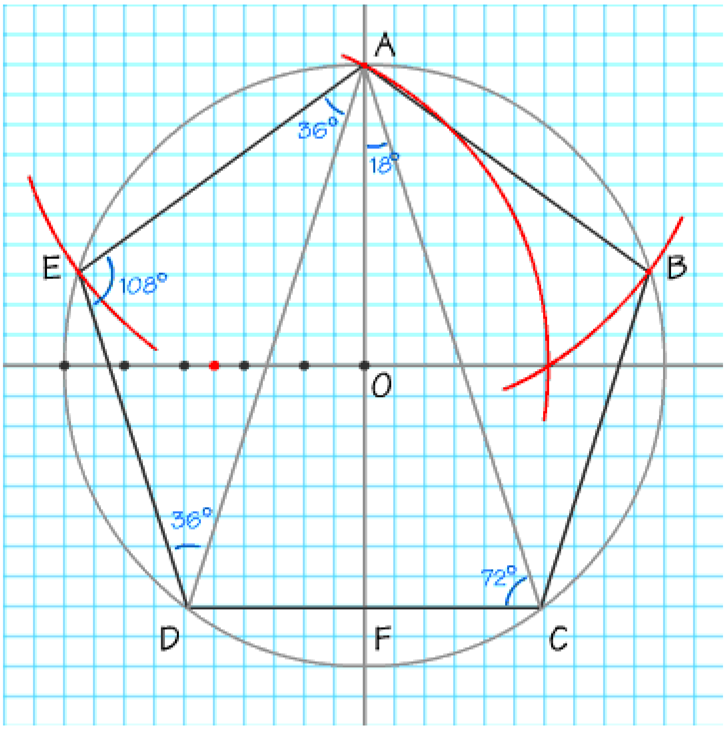


المخمس المنتظم و العدد الذهبي:



بالنسبة لهذا المخمس المنتظم لدينا: $\frac{AC}{AB}=\varphi$.

التعليل:



في المثلث AFD ، لدينا:

$$\frac{FD}{AD} = \sin(18^\circ)$$

أي: $FD = AD\sin(18^\circ)$.

و في المثلث AFC ، لدينا:

$$\frac{FC}{AC} = \sin(18^\circ)$$

أي: $FC = AC\sin(18^\circ)$.

و من جهة أخرى لدينا: $DC = DF + FC$

أي: $DC = AD\sin(18^\circ) + AC\sin(18^\circ)$

إذن: $DC = 2AD\sin(18^\circ)$

ومنه: $DC = 2AD\dfrac{1}{2\varphi}$

أي: $DC = \dfrac{AD}{\varphi}$

و بما أن: $DC = AB$ و $AD = AC$

فإن: $\varphi = \dfrac{AC}{AB}$