السنة الدراسية: 2010/2009

أولمبياد الرياضيات 2010
الفرض الثاني
الجمعة 04 دجنبر 2009

- حلول مقترحة -
من اقتراح: أذ سمير لخريسي

تمرين 1

لدينا $\begin{cases} x+y+z=2 \\ xy+yz+zx=1 \\ xyz=a \end{cases}$ أي أن x و y و z هي حلول المعادلة: $p(x)=0$ حيث: $p(x)=x^3-2x^2+x-a$

إذن لنبحث عن قيم a التي من أجلها تقبل الحدودية $p(x)$ 3 حلول حقيقية أي أن منحنى الدالة p يتقاطع

لدينا: $\forall x \in IR \quad p'(x)=3x^2-4x+1=(3x-1)(x-1)$

إذن و بعد حساب النهايات عند المحدات نحصل على جدول التغيرات التالي:

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$p'(x)$		+	|	-	|	+	
$p(x)$	$-\infty$	↗	$p\left(\frac{1}{3}\right)$	↘	$p(1)$	↗	$+\infty$

مع: $p\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{27}-a$ و $p(1)=-a$

إذاكان: $p\left(\frac{1}{3}\right)<0$ أو $p(1)>0$ فإن المعادلة: $p(x)=0$ ستقبل حلا وحيدا في IR

و إذا كان: $p\left(\frac{1}{3}\right)>0$ و $p(1)<0$ فإن المعادلة: $p(x)=0$ ستقبل 3 حلول مختلفة مثنى مثنى في IR

إذاكان : $p(1)=0$ أي: $a=0$ فإن: $p(x)=x^3-2x^2+x=x(x^2-2x+1)=x(x-1)^2$
أي أن $p(x)=0$ ستقبل 3 حلول في IR (حلان متساويان أي حل مزدوج)

إذاكان : $p\left(\frac{1}{3}\right)=0$ أي: $a=\frac{4}{27}$ فإن: $p(x)=x^3-2x^2+x-\frac{4}{27}=\left(x-\frac{4}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)^2$ (بعد إجراء القسمة الإقليدية)
أي أن $p(x)=0$ ستقبل 3 حلول في IR (حلان متساويان أي حل مزدوج)

خلاصة: $p(x)=0$ ستقبل 3 حلول في IR إذا وفقط إذا كان: $p\left(\frac{1}{3}\right)\geq 0$ و $p(1)\leq 0$ أي: $\begin{cases} \frac{4}{27}-a\geq 0 \\ -a\leq 0 \end{cases}$ أي: $\boxed{0\leq a\leq \frac{4}{27}}$

للتذكير : تكون α و β و λ جذور الحدودية: $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ إذا وفقط إذا كان: $\begin{cases} \alpha+\beta+\lambda=\frac{-b}{a} \\ \alpha\beta+\beta\lambda+\lambda\alpha=\frac{c}{a} \\ \alpha\beta\lambda=\frac{-d}{a} \end{cases}$

برهان: α و β و λ جذور الحدودية: $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ يعني:

$$\forall x \quad ax^3+bx^2+cx+d=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\lambda)$$
$$=a\left(x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\right)(x-\lambda)$$
$$=a\left(x^3-\lambda x^2-(\alpha+\beta)x^2+\lambda(\alpha+\beta)x+\alpha\beta x-\alpha\beta\lambda\right)$$
$$=ax^3-a(\alpha+\beta+\lambda)x^2+a(\alpha\beta+\beta\lambda+\lambda\alpha)x-a\alpha\beta\lambda$$

يعني: $\begin{cases}-a(\alpha+\beta+\lambda)=b\\ a(\alpha\beta+\beta\lambda+\lambda\alpha)=c\\ -a\alpha\beta\lambda=d\end{cases}$ يعني: $\begin{cases}\alpha+\beta+\lambda=\dfrac{-b}{a}\\ \alpha\beta+\beta\lambda+\lambda\alpha=\dfrac{c}{a}\\ \alpha\beta\lambda=\dfrac{-d}{a}\end{cases}$

تمرين 2

طريقة1:

$$A=(1+a^2)(1+b^2)-a(1+b^2)-b(1+a^2)$$
$$A=1+a^2+b^2+a^2b^2-a-ab^2-b-ba^2$$
$$A=a^2\left(1+\frac{1}{2}b^2-b\right)+b^2\left(1+\frac{1}{2}a^2-a\right)-a-b+1$$

لدينا $2A=a^2(b^2-2b+2)+b^2(a^2-2a+2)-2(a+b)+2$ **بالتالي:** $\boxed{(1+a^2)(1+b^2)\geq a(1+b^2)+b(1+a^2)}$

$$2A=a^2\left((b-1)^2+1\right)+b^2\left((a-1)^2+1\right)-2(a+b)+2$$
$$2A=a^2(b-1)^2+b^2(a-1)^2+a^2+b^2-2a-2b+2$$
$$2A=a^2(b-1)^2+b^2(a-1)^2+(a-1)^2+(b-1)^2$$

طريقة2:

نعلم أن: $a^2+1\geq 2a$ **منه:** $(a^2+1)(b^2+1)\geq 2a(b^2+1)$ **و بنفس الطريقة:** $(a^2+1)(b^2+1)\geq 2b(a^2+1)$

بعد جمع المتفاوتتين و الاختزال نجد: $\boxed{(1+a^2)(1+b^2)\geq a(1+b^2)+b(1+a^2)}$

تمرين 3

لدينا $\left(x+\frac{1}{2x}-1\right)\left(y+\frac{1}{2y}-1\right)\left(z+\frac{1}{2z}-1\right)=\left(1-\frac{xy}{z}\right)\left(1-\frac{yz}{x}\right)\left(1-\frac{zx}{y}\right)$ و $0<x<1$ و $0<y<1$ و $0<z<1$

للتبسيط نضع: $x+\frac{1}{2x}-1=U$ و $y+\frac{1}{2y}-1=V$ و $z+\frac{1}{2z}-1=W$ و $1-\frac{xy}{z}=C$ و $1-\frac{yz}{x}=A$ و $1-\frac{zx}{y}=B$

إذن: $UVW=ABC$

نعلم أن: $a+b\geq 2\sqrt{ab}\quad \forall a>0\,\forall b>0$ إذن: $x+\frac{1}{2x}\geq 2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$ منه: $U\geq\sqrt{2}-1>0$

و بنفس الطريقة نجد أن: $V>0$ و $W>0$ منه: $UVW=ABC>0$

إذن أحد الأعداد A أو B أو C موجب قطعا و العددان الآخران لهما نفس الإشارة.

مثلا نأخذ حالة: $A>0$ و $BC>0$ (سيكون نفس التعليل في الحالات الأخرى نظرا لتماثل المعطيات)

إذا افترضنا أن $B<0$ و $C<0$ سيكون لدينا: $1-\frac{yz}{x}<0$ و $1-\frac{zx}{y}<0$ أي: $z>\frac{x}{y}$ و $z>\frac{y}{x}$ منه: $2z>\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$

منه: $z>1$ و هذا يناقض المعطيات

إذن جميع الأعداد A و B و C موجبة قطعا.

لدينا الآن من جهة أخرى:

$$U^2-BC=\left(x+\frac{1}{2x}-1\right)^2-\left(1-\frac{zx}{y}\right)\left(1-\frac{xy}{z}\right)=x^2+2x\left(\frac{1}{2x}-1\right)+\left(\frac{1}{2x}-1\right)^2-\left(1-\frac{xy}{z}-\frac{zx}{y}+x^2\right)$$

$$=x^2+1-2x+\left(\frac{1}{2x}-1\right)^2-1+x\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)-x^2=\left(\frac{1}{2x}-1\right)^2+x\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}-2\right)=\left(\frac{1}{2x}-1\right)^2+x\frac{(z-y)^2}{zy}$$

منه: $U^2\geq BC>0$ و بنفس الطريقة نبين أن: $V^2\geq AC>0$ و $W^2\geq AB>0$

إذا افترضنا مثلا أن: $U^2>BC$ و باستعمال المتفاوتات السابقة سنجد أن: $U^2V^2W^2>A^2B^2C^2$ أي: $UVW>ABC$

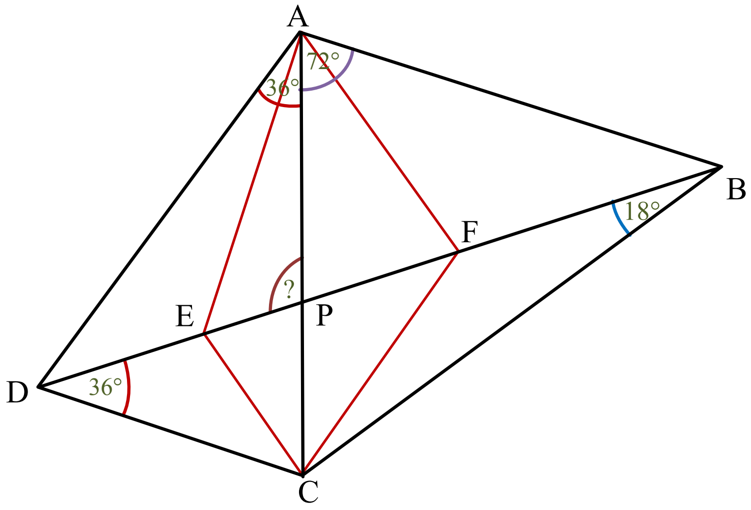
و هذا يناقض المعطيات: إذن: $U^2=BC$ و بنفس الطريقة نبين أن: $V^2=AC$

و باستعمال المتساوية السابقة نستنتج أن:

$\frac{1}{2x}-1=z-y=0$ و أيضا: $\frac{1}{2y}-1=z-x=0$ بالتالي: $x=y=z=\frac{1}{2}$

عكسيا يمكن التحقق بسهولة من صحة الحل.

تمرين 4



لتكن E **نقطة تقاطع منصف الزاوية** $D\hat{A}P$ **مع** (DB)

و لتكن F **نقطة تقاطع منصف الزاوية** $P\hat{A}B$ **مع** (DB)

إذن: $C\hat{B}P = 18° = \frac{36}{2} = E\hat{A}P$ **منه الرباعي** $AECB$ **دائري منه:** $B\hat{E}C = B\hat{A}C = 72°$

و أيضا: $C\hat{D}P = 36° = \frac{72}{2} = F\hat{A}P$ **منه الرباعي** $AFCD$ **دائري منه:** $D\hat{F}C = D\hat{A}C = 36°$

إذن: $E\hat{C}F = 180 - (F\hat{E}C + E\hat{F}C) = 180 - (72+36) = 72° = F\hat{E}C$

إذن: EFC **مثلث متساوي الساقين في** F **منه:** $EF = FC$

أيضا لدينا: $B\hat{F}C = 180 - E\hat{F}C = 180 - 36 = 144°$ **منه:** $F\hat{C}B = 180 - (B\hat{F}C + F\hat{B}C) = 180 - (144+18) = 18° = F\hat{B}C$

إذن: FBC **مثلث متساوي الساقين في** F **منه:** $FC = FB$

إذن: $EF = FC = FB$ **إذن** F **منتصف** $[EB]$

و بما أن: $E\hat{A}B = E\hat{A}P + P\hat{A}B = 18 + 72 = 90°$ **فإن** EAB **مثلث قائم الزاوية في** A **و بما أن** F **منتصف وتره** $[EB]$

فإن: $AF = EF = FB$ ، **إذن:** $AF = FC$ **إذن:** $A\hat{C}F = C\hat{A}F = 36°$

بالتالي: $\boxed{A\hat{P}D = C\hat{P}F = 180 - (P\hat{C}F + P\hat{F}C) = 180 - (36+36) = 108°}$

رياضيـــات النجـــــاح
www.naja7math.com