السنة الدراسية: 2009/2008

أولمبياد الرياضيات 2009

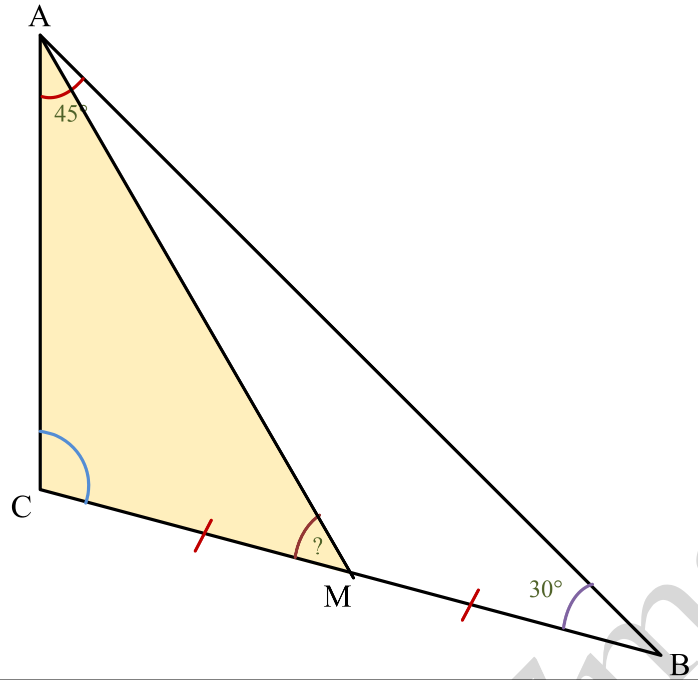
الفرض الأول

الجمعة 27 مارس 2009

- حلول مقترحة -

من اقتراح: أذ سمير لخريسي

تمرين 1



1

لأجل حساب $A\hat{M}C$ سنبين أن المثلثين ABC و ACM متشابهان.

بالفعل : للمثلثين زاوية مشتركة: $A\hat{C}B$

لنبرهن أن ضلعي الزاوية من كل مثلث متناسبان أي لنبين أن: $\frac{CA}{CB}=\frac{CM}{CA}$

بالفعل لدينا في المثلث ABC : $\frac{\sin(A)}{BC}=\frac{\sin(B)}{CA}$ منه: $\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{BC}=\frac{\frac{1}{2}}{CA}$ منه: $\frac{\sqrt{2}}{BC}=\frac{1}{CA}$ منه: $\frac{2}{BC^2}=\frac{1}{CA^2}$

منه: $\frac{CA}{BC}=\frac{\frac{1}{2}BC}{CA}$ أي: $\frac{CA}{CB}=\frac{CM}{CA}$ ، الآن بما أن المثلثين ABC و ACM متشابهان فإن: $\boxed{A\hat{M}C=B\hat{A}C=45°}$

فكرة التمرين تكمن في رسم الشكل بدقة ثم قياس الزاوية المطلوبة باستعمال منقلة و من ثم ملاحظة تشابه المثلثات و محاولة البرهان على ذلك.

2

للبرهان على المتساوية المطلوبة سنحسب مساحة المثلث ABC بطريقتين:

لدينا من جهة: $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\times BC\times\sin(\hat{B})=\frac{1}{2}AB\times BC\times\frac{1}{2}=\frac{AB\times BC}{4}$

بما أن M منتصف $[BC]$ فإن : $S_{AMC}=S_{AMB}=\frac{1}{2}S_{ABC}$

(لأن: $S_{AMB}=\frac{1}{2}MA\times MB\times\sin(\pi-C\hat{M}A)=\frac{1}{2}MA\times MC\times\sin(C\hat{M}A)=S_{AMC}$)

إذن من جهة أخرى: $S_{ABC}=2\,S_{AMC}=2\times\frac{1}{2}\times AC\times AM\times\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{AC\times AM}{2}$

بمقارنة المتساويتين نستنتج المتساوية المطلوبة: $\boxed{AM=\frac{AB\times BC}{2\,AC}}$

رياضيـــات النجــــــاح
www.naja7math.com

تمرين 2

1 لدينا:

$$K = a^2 + 4b^2 + 8c^2 - (3ab + 4bc + 2ca)$$
$$K = a^2 + 4b^2 + 8c^2 - 3ab - 4bc - 2ca$$
$$K = a^2 - (3b + 2c)a + 4b^2 + 8c^2$$
$$K = \left(a - \frac{3b+2c}{2}\right)^2 - \left(\frac{3b+2c}{2}\right)^2 + 4b^2 + 8c^2$$
$$K = \left(a - \frac{3b+2c}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(16b^2 + 32c^2 - 9b^2 - 12bc - 4c^2\right)$$
$$K = \left(a - \frac{3b+2c}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(7b^2 + 28c^2 - 12bc\right)$$
$$K = \left(a - \frac{3b+2c}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\left(b^2 - 4bc + 4c^2\right)$$
$$K = \left(a - \frac{3b+2c}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}(b - 2c)^2 \geq 0$$

بالتالي: $\boxed{a^2 + 4b^2 + 8c^2 \geq 3ab + 4bc + 2ca}$

2 حالة التساوي تكون إذا وفقط إذا كان: $\left(a - \frac{3b+2c}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}(b-2c)^2 = 0$ أي: $\begin{cases} b - 2c = 0 \\ a - \dfrac{3b+2c}{2} = 0 \end{cases}$ أي: $\boxed{\begin{cases} b = 2c \\ a = 4c \end{cases}}$

تمرين 3

1 نعتبر الدالة $f(x) = x^3 - 3x - 1$

لدينا: $\forall x \in IR \quad f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$

و لدينا:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$p'(x)$		+		-		+	
$p(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ و $f(-1) = 1 > 0$ و $f(1) = -3 < 0$

بالتالي المعادلة $f(x) = 0$ تقبل ثلاثة حلول مختلفة في IR .

تم تعديل المعطيات $x^3 - x - 1 = 0$ إلى $x^3 - 3x - 1 = 0$ لأن المعادلة $x^3 - x - 1 = 0$ تقبل حلا وحيدا في في IR .

2 نعلم أن: $\begin{cases} \alpha + \beta + \lambda = 0 \\ \alpha\beta + \beta\lambda + \lambda\alpha = -3 \\ \alpha\beta\lambda = 1 \end{cases}$ منه:

$$S = \frac{2+\alpha-1}{1-\alpha} + \frac{2+\beta-1}{1-\beta} + \frac{2+\lambda-1}{1-\lambda} = \frac{2}{1-\alpha} - 1 + \frac{2}{1-\beta} - 1 + \frac{2}{1-\lambda} - 1$$
$$S = 2\left(\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\beta} + \frac{1}{1-\lambda}\right) - 3 =$$
$$S = 2\frac{(1-\lambda-\beta+\beta\lambda) + (1-\lambda-\alpha+\alpha\lambda) + (1-\beta-\alpha+\alpha\beta)}{(1-\beta-\alpha+\alpha\beta)(1-\lambda)} - 3$$
$$S = 2\frac{3 - 2(\alpha+\beta+\lambda) + (\alpha\beta+\beta\lambda+\lambda\alpha)}{1-\lambda-\beta+\beta\lambda-\alpha+\alpha\lambda+\alpha\beta-\alpha\beta\lambda} - 3 = 2\frac{3-3}{1-3-1} - 3 = -3$$

لم يكن من الضروري حساب المقام لكون البسط منعدم، لكن تم حسابه لتوضيح طريقة الحساب في حالات مشابهة.

للتذكير : تكون α و β و λ جذور الحدودية: $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ إذا وفقط إذا كان: $\begin{cases}\alpha+\beta+\lambda=\dfrac{-b}{a}\\ \alpha\beta+\beta\lambda+\lambda\alpha=\dfrac{c}{a}\\ \alpha\beta\lambda=\dfrac{-d}{a}\end{cases}$

برهان: α و β و λ جذور الحدودية: $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ يعني:

$$\begin{aligned}\forall x \quad ax^3+bx^2+cx+d &= a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\lambda)\\ &= a\left(x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\right)(x-\lambda)\\ &= a\left(x^3-\lambda x^2-(\alpha+\beta)x^2+\lambda(\alpha+\beta)x+\alpha\beta x-\alpha\beta\lambda\right)\\ &= ax^3-a(\alpha+\beta+\lambda)x^2+a(\alpha\beta+\beta\lambda+\lambda\alpha)x-a\alpha\beta\lambda\end{aligned}$$

يعني: $\begin{cases}-a(\alpha+\beta+\lambda)=b\\ a(\alpha\beta+\beta\lambda+\lambda\alpha)=c\\ -a\alpha\beta\lambda=d\end{cases}$ يعني: $\begin{cases}\alpha+\beta+\lambda=\dfrac{-b}{a}\\ \alpha\beta+\beta\lambda+\lambda\alpha=\dfrac{c}{a}\\ \alpha\beta\lambda=\dfrac{-d}{a}\end{cases}$

تمرين 4

نعلم أن: $\forall(a,b)\in IR \quad a^2+b^2\geq 2ab$ منه: $1+x\geq 2\sqrt{x}\Rightarrow \left(1+\sqrt{x}\right)^2=1+x+2\sqrt{x}\leq 2(x+1)\Rightarrow \dfrac{1}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}\geq\dfrac{1}{2(x+1)}$

و أيضا: $\dfrac{1}{\left(1+\sqrt{y}\right)^2}\geq\dfrac{1}{2(y+1)}$ منه: $\dfrac{1}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}+\dfrac{1}{\left(1+\sqrt{y}\right)^2}\geq\dfrac{1}{2(x+1)}+\dfrac{1}{2(y+1)}$

و من جهة أخرى لدينا:

$$\forall a>0 \ \ \forall b>0 \ \ (a+b)^2\geq 4ab \Rightarrow \forall a>0 \ \ \forall b>0 \ \ \frac{a+b}{2ab}\geq\frac{2}{a+b} \Rightarrow \forall a>0 \ \ \forall b>0 \ \ \frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}\geq\frac{2}{a+b}$$

بالتالي: $\boxed{\dfrac{1}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}+\dfrac{1}{\left(1+\sqrt{y}\right)^2}\geq\dfrac{2}{x+y+2}}$