

**تمرين 1**

$$A = 2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + a_1 + a_2 + a_3 - (a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_3 + a_3 \cdot a_1)$$

$$A = 2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + a_1 + a_2 + a_3 - 2(a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_3 + a_3 \cdot a_1) + (a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_3 + a_3 \cdot a_1)$$

$$A = 2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_3 + a_3 \cdot a_1) + a_1 + a_2 + a_3 + \left(\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right) \quad \text{ضع:}$$

$$A = (a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 + (a_2 - a_3)^2 + \left(a_1 - \frac{1}{a_1}\right)^2 + \left(a_2 - \frac{1}{a_2}\right)^2 + \left(a_3 - \frac{1}{a_3}\right)^2 + 6$$

$$2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + a_1 + a_2 + a_3 \geq 6 + a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_3 + a_3 \cdot a_1 \quad \text{بالتالي:}$$

$$a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_3 + a_3 \cdot a_1 = \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \quad \text{استعملنا } a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 1 \text{ في تحويل}$$

**تمرين 2**

$$\text{لدينا } a^2 + b^2 > 5c^2$$

$$\text{نعلم أن: } c + a > b \quad \text{منه: } c^2 + a^2 + 2ac > b^2 \quad \text{منه: } c^2 + a^2 + 2ac + a^2 > b^2 + a^2 > 5c^2 \quad \text{منه: } 2a^2 + 2ac > 4c^2$$

$$\text{منه: } a^2 + ac - 2c^2 > 0 \quad \text{منه: } (a + 2c)(a - c) > 0 \quad \text{منه: } a > c$$

بنفس الطريقة:

$$c + b > a \Rightarrow c^2 + b^2 + 2cb > a^2 \Rightarrow c^2 + 2b^2 + 2cb > a^2 + b^2 > 5c^2 \Rightarrow 2b^2 + 2cb - 4c^2 > 0$$

$$\Rightarrow b^2 + cb - 2c^2 > 0 \Rightarrow (b + 2c)(b - c) > 0 \Rightarrow b > c$$

$$\text{بالتالي: } c < a \text{ et } c < b$$

$$A = xyz + 3xy + 2xz - yz + 6x - 3y - 2z \quad \text{وضع: } (S) \begin{cases} xy^2 - y^2 + 4xy + 4x - 4y = 4004 \\ xz^2 - z^2 + 6xz + 9x - 6z = 1009 \end{cases}$$

لدينا

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y^2(x-1) + 4y(x-1) + 4x - 4 = 4004 - 4 \\ z^2(x-1) + 6z(x-1) + 9x - 9 = 1009 - 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(y^2 + 4y + 4) = 4000 \\ (x-1)(z^2 + 6z + 9) = 1000 \end{cases}$$

لدينا:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(y+2)^2 = 4000 \\ (x-1)(z+3)^2 = 1000 \end{cases}$$

$$A = xyz + 3xy + 2xz - yz + 6x - 3y - 2z$$

$$A = yz(x-1) + 2z(x-1) + 3y(x-1) + 6(x-1) + 6$$

$$A - 6 = (x-1)(yz + 2z + 3y + 6)$$

و من جهة أخرى:

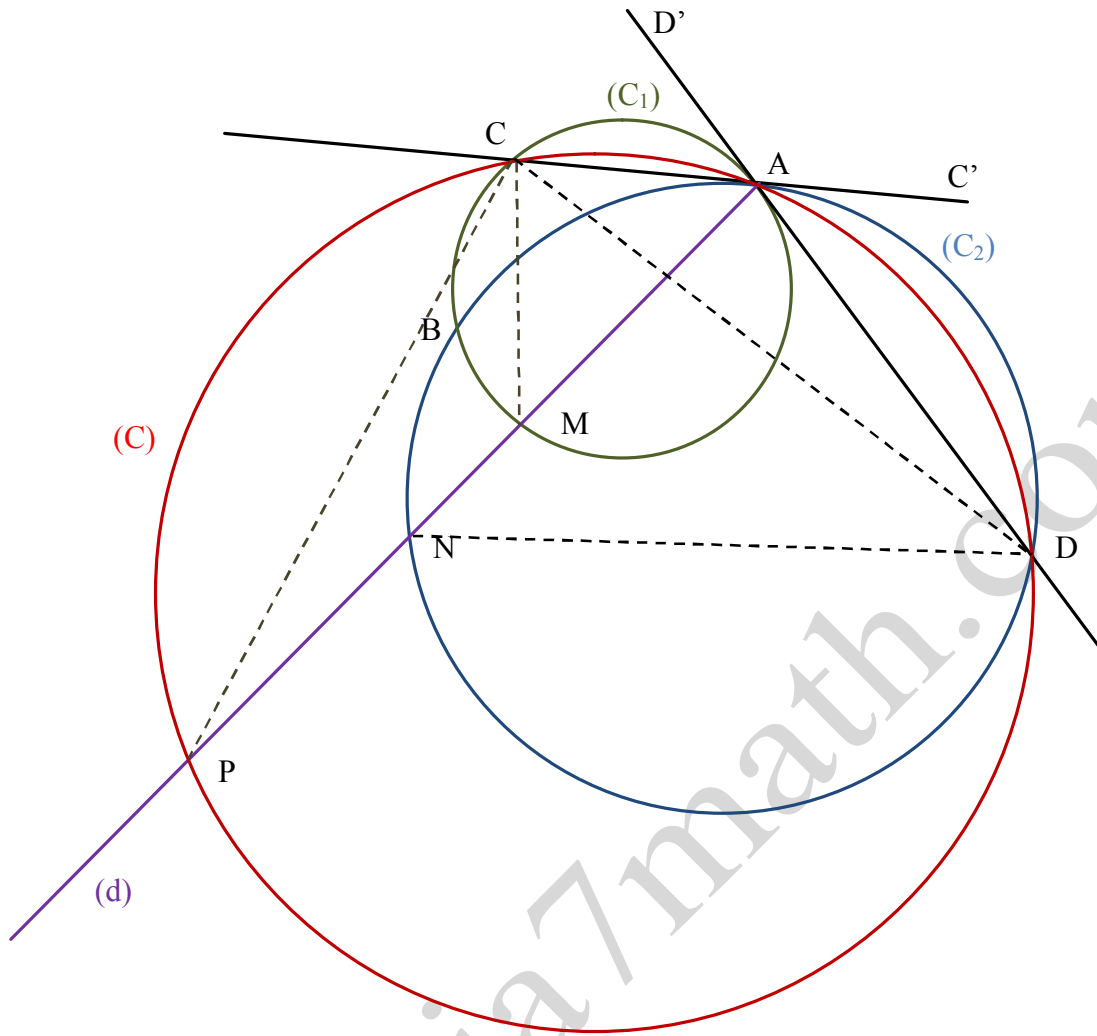
$$A - 6 = (x-1)(z(y+2) + 3(y+2))$$

$$A - 6 = (x-1)(z+3)(y+2) > 0$$

$$(S) \Rightarrow (x-1)^2(y+2)^2(z+3)^2 = 4000 \times 1000 \Rightarrow (A-6)^2 = 4 \times 10^6 \Rightarrow A = 6 + 2000 = 2006$$

إذن:

رياضيات النجاح  
www.naja7math.com



لدينا في الدائرة  $(C_1)$   $\widehat{CMA}$  و  $\widehat{CAD'}$  زاويتان محيطيتان تحصران القوس  $AC$  منه:  $\widehat{CAD'} = \widehat{CMA}$

منه:  $\widehat{PMC} = \pi - \widehat{CMA} = \pi - \widehat{CAD'} = \widehat{CAD}$  (1)

و أيضا في الدائرة  $(C)$   $\widehat{CDA}$  و  $\widehat{CPA}$  زاويتان محيطيتان تحصران القوس  $AC$  منه:  $\widehat{CDA} = \widehat{CPA}$  (2)

من (1) و (2) نستنتج أن  $CAD$  و  $CMP$  مثلثان متشابهان ، منه:  $(*) \frac{MC}{AC} = \frac{MP}{AD}$

لدينا في الدائرة  $(C_1)$   $\widehat{ACM}$  و  $\widehat{DAN}$  زاويتان محيطيتان تحصران القوس  $AM$  منه:  $\widehat{ACM} = \widehat{DAN}$  (3)

و أيضا في الدائرة  $(C_2)$   $\widehat{CAN}$  و  $\widehat{ADN}$  زاويتان محيطيتان تحصران القوس  $AC$  منه:  $\widehat{CAN} = \widehat{ADN}$  (4)

من (3) و (4) نستنتج أن  $DAN$  و  $CAM$  مثلثان متشابهان ، منه:  $(**) \frac{AN}{AD} = \frac{MC}{AC}$

من (\*) و (\*\*) نستنتج أن:  $\frac{MP}{AD} = \frac{AN}{AD}$  منه:  $MP = AN$  و بالتالي:  $AM = AN - MN = MP - MN = NP$