أولمبياد الرياضيات 2011

الفرض الثاني

الجمعة 03 دجنبر 2010

- حلول مقترحة -

من اقتراح: أذ سمير لخريسي

السنة الدراسية: 2011/2010

تمرين 1

لنحسب $S=1+2+3-4-5+6+7+8-9-10+....-2010$

إذا وضعنا $S_1=1+2+3-4-5$ **و** $S_2=6+7+8-9-10$ $S_3=11+12+13-14-15$ **و ...**

فسنحصل على حدود متتالية حسابية أساسها $r=5$ **لأن: إذا كان** $S=k+(k+1)+(k+2)-(k+3)-(k+4)$ **فإن الحد الذي يليه هو** $S'=(k+5)+(k+6)+(k+7)-(k+8)-(k+9)$ **منه:**

$S'-S=(3k+18-2k-17)-(3k+3-2k-7)=k+1-(k-4)=5$

الحد الأول هو : $S_1=1+2+3-4-5=-3$ **و الحد الأخير هو:** $S_l=2006+2007+2008-2009-2010=2002$

و عدد الحدود هو $l-1+1=l=\frac{S_l-S_1}{5}+1=402$ **(لأن:** $l=1+\frac{S_l-S_1}{5} \Rightarrow l-1=\frac{S_l-S_1}{5} \Rightarrow S_l=S_1+5(l-1)$ **)**

بالتالي: $\boxed{S=\frac{-3+2002}{2}\times 402=401799}$

طريقة2:

$$S=(1+2+3-4-5)+(6+7+8-9-10)+....(2006+2007+2008-2009-2010)$$

لدينا:

$$S=\sum_{k=0}^{401}[(5k+1)+(5k+2)+(5k+3)-(5k+4)-(5k+5)]$$

$$S=\sum_{k=0}^{401}(5k-3)=5\sum_{k=0}^{401}(k)-3\times 402=5\times\frac{0+401}{2}\times 402-3\times 402$$

$$S=5\times 401\times 201-1206=401799$$

رياضيـــات النجـــــاح
www.naja7math.com

تمرين 2

لنبين أن $9\,abc \le ab+bc+ca < \frac{1}{4}+3\,abc$ حيث $a+b+c=1$

لدينا من جهة: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\ge 3+2+2+2\ge 9$

منه: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 9$ أي: $\boxed{ab+bc+ca\ge 9\,abc}$

للبرهان على المتفاوتة الأخرى نضع:

$$\boxed{\begin{array}{l} S=ab+bc+ca-3\,abc \\ S=ab-abc+bc-abc+ca-abc \\ S=ab(1-c)+bc(1-a)+ca(1-b) \\ S=ab(a+b)+bc(b+c)+ca(a+c) \\ S=ab^2+ab^2+cb^2+bc^2+ca^2+ac^2 \end{array}}$$

و من جهة أخرى: نعلم من جهة أن: $a(a-b)(a-c)+b(b-a)(b-c)+c(c-a)(c-b)\ge 0$

(حالة خاصة لمتفاوتة Schur's)(لمزيد من المعلومات عن متفاوتة Schur's أنظر هذا الرابط)

منه:

$$a\left(a^2-ac-ab+bc\right)+b\left(b^2-bc-ab+ac\right)+c\left(c^2-bc-ac+ab\right)\ge 0$$

$$a^3-a^2c-a^2b+abc+b^3-b^2c-ab^2+abc+c^3-bc^2-ac^2+abc\ge 0$$

$$a^3+b^3+c^3+3abc\ge ab^2+ab^2+cb^2+bc^2+ca^2+ac^2$$

$$a^3+b^3+c^3+3abc\ge S$$

و نعلم من جهة أخرى أن: $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+6\,a\,b\,c+3\left(ab^2+ab^2+cb^2+bc^2+ca^2+ac^2\right)$

منه: $a^3+b^3+c^3=1-6\,a\,b\,c-3\,S$ منه: $1-6\,a\,b\,c-3\,S+3\,a\,b\,c\ge S$ منه: $\boxed{S\le\frac{1-3\,a\,b\,c}{4}<\frac{1}{4}}$

صعوبة السؤال تكمن في عدم معرفة العديد من التلاميذ لبعض المتطابقات و المتفاوتات الهامة، لذلك ينبغي الاستفادة من ذلك و البحث عن حل المتفاوتات الهامة.

تمرين 3

لدينا: $\forall (x,y)\in IR\times IR \quad x\,f(x+xy)=x\,f(x)+f(x^2)\,f(y)$

نأخذ $x=y=0$ نجد: $0=f(0)\,f(0)$ منه: $f(0)=0$

نأخذ $y=-1$ نجد: $(*)\ \forall x\in IR \quad x\,f(x)+f(x^2)\,f(-1)=0$

و نأخذ $x=1$ فنجد $(**)\ \forall y\in IR \quad f(y+1)=f(1)+f(1)\,f(y)$

ثم نأخذ $x=-1$ في $(*)$ فنجد: $-f(-1)+f(1)\,f(-1)=0$

و نأخذ $y=-1$ في $(**)$ فنجد: $f(1)+f(1)\,f(-1)=0$

منه: $f(1)\big(f(-1)+1\big)=0$ منه: $f(1)=0$ أو $f(-1)=-1$

- إذا كان: $f(1)=0$ فحسب $(*)$ يصبح: $\forall y\in IR \quad f(y+1)=0$ أي $\forall x\in IR \quad f(x)=0$
الدالة المنعدمة $\boxed{x\mapsto 0}$ تحقق شروط المسألة

- إذا كان $f(1)\neq 0$ ، إذن $f(-1)=-1$ و من $-f(-1)+f(1)\,f(-1)=0$ نجد $f(1)=1$
منه: $\boxed{(***)\ \forall x\in IR \quad f(x^2)=x\,f(x)}$ و $\boxed{(****)\ \forall y\in IR \quad f(y+1)=f(y)+1}$
الآن تصبح المتساوية الأصلية:
$$\forall (x,y)\in IR\times IR \quad x\,f(x+xy)=x\,f(x)+xf(x)\,f(y)=xf(x)(1+f(y))=xf(x)\,f(y+1)$$
و بأخذ $y=x-1$ تصبح: $\forall x\in IR \quad x\,f(x+x(x-1))=xf(x)\,f(x)$
أي: $\forall x\in IR^* \quad f(x^2)=[f(x)]^2$ أو أيضا: $\forall x\in IR^* \quad x\,f(x)=[f(x)]^2$
و بما أن: $f(0)=0$ فإن: $\forall x\in IR \quad x\,f(x)=[f(x)]^2$

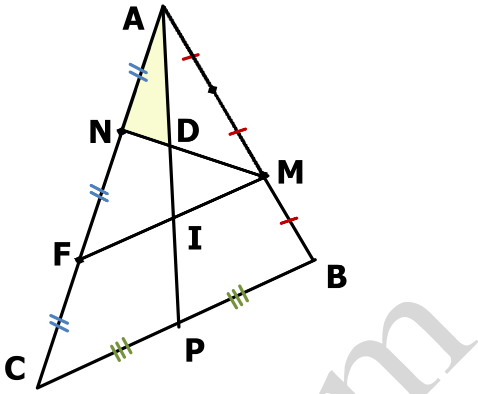
منه: $\forall x\in IR \quad (x+1)\,f(x+1)=[f(x+1)]^2$ و باستعمال $(****)$
نجد: $\forall x\in IR \quad (x+1)(f(x)+1)=[f(x)+1]^2$ أي: $\forall x\in IR \quad xf(x)+x+f(x)+1=[f(x)]^2+2\,f(x)+1$
منه: $\forall x\in IR \quad xf(x)+x+f(x)+1=xf(x)+2\,f(x)+1$
بالتالي: $\boxed{\forall x\in IR \quad f(x)=x}$ ، عكسيا يمكن التحقق بسهولة من صحة هذا الحل

خلاصة: $\boxed{S=\left\{\begin{matrix} IR\mapsto IR \\ x\mapsto 0\end{matrix} \ ; \ \begin{matrix} IR\mapsto IR \\ x\mapsto x\end{matrix}\right\}}$

لاحظ أننا في عند الانتقال للعبارة $\forall x\in IR^* \quad f(x^2)=[f(x)]^2$ افترضنا x غير منعدم لكي يمكن الاختزال ثم تحققنا من صحة المتساوية في حالة الانعدام لكي نتمكن من تعميم المتساوية على IR

تمرين 4

الطريقة الأولى



نعتبر F منتصف $[CN]$ و I نقطة تقاطع (AP) و (FM)

منه: $\frac{AM}{AB}=\frac{2}{3}=\frac{AF}{AC}$ و باستعمال مبرهنة طاليس العكسية

نستنتج أن $(FM)//(BC)$

و باستعمال مبرهنة طاليس المباشرة في المثلثين APC و APB نجد:

$\frac{AI}{AP}=\frac{AM}{AB}=\frac{IM}{PB}=\frac{2}{3}$ و $\frac{AI}{AP}=\frac{AF}{AC}=\frac{IF}{PC}=\frac{2}{3}$

منه: $\frac{IM}{PB}=\frac{IF}{PC}$ و بما أن: $PB=PC$ فإن: $IM=IF$

إذن I منتصف $[FM]$، إذن D هي مركز ثقل المثلث AFM

منه: $AD=\frac{2}{3}AI=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}AP$ منه: $\boxed{\frac{AD}{AP}=\frac{4}{9}}$

الآن لدينا: $\frac{S_{ACP}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{1}{2}CP\times CA\times\sin(\hat{C})}{\frac{1}{2}CB\times CA\times\sin(\hat{C})}=\frac{CP}{CB}=\frac{1}{2}$

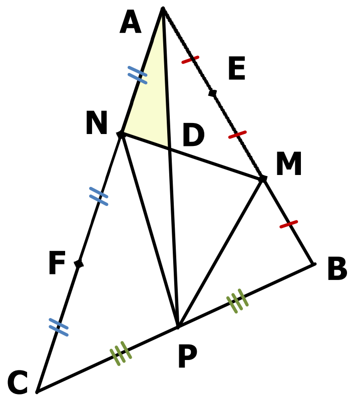
منه: $\boxed{S_{ACP}=\frac{S_{ABC}}{2}=\frac{1}{2}}$

$$\frac{S_{ADN}}{S_{ACP}}=\frac{\frac{1}{2}AN\times AD\times\sin(\hat{NAD})}{\frac{1}{2}AC\times AP\times\sin(\hat{NAD})}=\frac{AN}{AC}\times\frac{AD}{AP}$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{4}{9}=\frac{4}{27}$$

بالتالي: $\boxed{S_{ADN}=\frac{4}{27}\times S_{ACP}=\frac{4}{27}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{27}}$

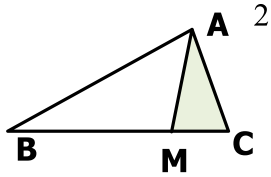
الطريقة الثانية



لأجل التبسيط سنستعمل الخاصية التالية و التي يمكن البرهان عليها بسهولة" إذا كان ABC مثلثا و $M\in[BC]$

فإن: $\frac{S_{AMC}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{1}{2}\sin(\hat{C})\times AC\times CM}{\frac{1}{2}\sin(\hat{C})\times AC\times CB}=\frac{CM}{CB}$

أي $S_{AMC}=\frac{CM}{CB}S_{ABC}$



باستعمال الخاصية أعلاه نستنتج أن:

$\boxed{S_{ACP}=\frac{1}{2}\times S_{ABC}=\frac{1}{2}}$ و $\boxed{S_{ANP}=\frac{1}{3}\times S_{ACP}=\frac{1}{6}}$

$\boxed{S_{APB}=\frac{1}{2}\times S_{ABC}=\frac{1}{2}}$ و $\boxed{S_{AMP}=\frac{2}{3}\times S_{APB}=\frac{1}{3}}$

و $\boxed{S_{AMPN}=S_{ANP}+S_{AMP}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}}$

و $\boxed{S_{AND}=\frac{AD}{AP}S_{ANP}}$ و $\boxed{S_{AMD}=\frac{AD}{AP}S_{AMP}}$

منه: $\boxed{\frac{S_{AND}}{S_{ANP}}=\frac{S_{AMD}}{S_{AMP}}=\frac{S_{AND}+S_{AMD}}{S_{ANP}+S_{AMP}}=\frac{S_{AMN}}{S_{AMPN}}}$

و أيضا: $\boxed{\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{1}{2}\sin(\hat{A})\times AN\times AM}{\frac{1}{2}\sin(\hat{A})\times AC\times AB}=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}}$

بالتالي:

$$\boxed{S_{AND}=S_{ANP}\times\frac{S_{AMN}}{S_{AMPN}}=\frac{1}{6}\times\frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}\times\frac{2}{9}\times\frac{2}{1}=\frac{2}{27}}$$

هناك طريقة ثالثة نستعمل فيها الاحداثيات فنعتبر مثلا المعلم $(C,\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$ و نحدد إحداثيات النقط ثم نطبق قاعدة حساب المساحة بالإحداثيات