أحمد القريشي

# سلسلة الأمة

# في

# الرياضيات

## السنة الثانية من سلك الباكلوريا

## شعبة العلوم التجريبية

- مسلك علوم الحياة والأرض
- مسلك العلوم والتكنولوجيا الميكانيكية
- مسلك العلوم الفيزيائية
- مسلك العلوم والتكنولوجيا الكهربائية
- مسلك العلوم الزراعية

- نماذج من امتحانات وطنية
- نماذج من امتحانات أكاديمية
- نماذج من امتحانات تجريبية
- تمارين لتقوية التعلمات

مكتبة الأمة

17-15 زنقة الإمام القسطلاني، الأحباس - الدار البيضاء
الهاتف: 89 -94 -31 - 022 / 44 -07 -44 - 022
فاكس: 69 -65 -30 - 022
E-mail:alouma@menara.ma

# الفهرس


| الفصل | الصفحة |
|---|---|
| الاتصال و الاشتقاق و دراسة الدوال | 5 |
| I - الاتصال و الاشتقاق | 5 |
| II - دراسة الدوال العددية | 29 |
| المتتاليات العددية | 49 |
| الدوال الأصلية | 69 |
| الدوال اللوغاريتمية و الأسية،الجزء الأول | 80 |
| الأعداد العقدية - الجزء الأول- | 106 |
| الدوال اللوغاريتمية و الأسية،الجزء الثاني | 121 |
| الحساب التكاملي | 149 |
| المعادلات التفاضلية | 169 |
| الأعداد العقدية - الجزء الثاني- | 175 |
| الجداء السلمي في الفضاء وتطبيقاته،الجداء المتجهي | 193 |
| حساب الاحتمالات | 209 |
| مسائل ( تتعلق بـ : الدوال والمتتاليات وحساب التكامل ) | 222 |
| المراجع | 256 |

# نموذج

# لأحد الدروس

# II . دراسة الدوال العددية

**تمرين 17** | **لتقوية التعلمات**

نعتبر الدالة $f$ للمتغير الحقيقي $x$ بحيث : $f(x)=2x-1+\sqrt{x-1}$ .

و لتكن $(C_f)$ منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$ .

1) حدد $D_f$ مجوعة تعريف الدالة $f$ .

2) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وادرس الفرع اللانهائي على اليمين للمنحنى $(C_f)$ بجوار $+\infty$ .

3) أدرس قابلية الاشتقاق في النقطة 1 على اليمين وأول هندسيا النتيجة المحصل عليها .

4) ادرس تغيرات الدالة $f$ على $D_f$.

5) حدد وضع $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(D):\ y=2x$

6) أ- بين أن الدالة $f$ تقبل دالة عكسية $f^{-1}$.

ب- أنشئ $(C_f)$ و $(C_{f^{-1}})$ في نفس المعلم.

## الحل

$$f(x)=2x-1+\sqrt{x-1}$$

1) لنحدد $D_f$

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x-1\geq 0\}$$
$$=\{x\in\mathbb{R}/x\geq 1\}$$

إذن $\boxed{D_f=[1;+\infty[}$

2) لنحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 2x-1+\sqrt{x-1}=+\infty$$

إذن $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$

- الفرع اللانهائي بجوار $+\infty$

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ؛ لنحسب: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1+\sqrt{x-1}}{x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty} 2-\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x-1}}{x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty} 2-\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}}{\sqrt{x}\sqrt{x}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty} 2-\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}}$$
$$=2$$

- لنحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-2x$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-2x=\lim_{x\to+\infty} 2x-1+\sqrt{x-1}-2x$$
$$=\lim_{x\to+\infty} -1+\sqrt{x-1}$$
$$=+\infty$$

إذن المستقيم $y=2x$ اتجاه مقارب للمنحنى $(C_f)$ بجوار $+\infty$ .

3) لندرس قابلية الاشتقاق في النقطة 1 على اليمين .

$$f_d'(1)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{2x-1+\sqrt{x-1}-1}{x-1}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{2x-2}{x-1}+\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}2+\frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$=+\infty$$

إذن $\boxed{f_d'(1)=+\infty}$

ومنه فإن الدالة $f$ غير قابلة للاشتقاق على يمين 1 و تقبل نصف مماس عمودي .

4) تغيرات الدالة $f$ .

- لنحسب $f'(x)$ لكل $x$ من $]1;+\infty[$

$$\forall x\in ]1;+\infty[\ ;\ f'(x)=\left(2x-1+\sqrt{x-1}\right)'$$

$$=2+\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

وبما أن $2+\frac{1}{2\sqrt{x-1}}>0$ لكل $x$ من $]1;+\infty[$

فإن $\forall x\in ]1;+\infty[\ ;\ f'(x)>0$

إذن الدالة $f$ تزايدية على $]1;+\infty[$ .

- جدول تغيرات $f$ .

| $x$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | \| | $+$ |
| $f(x)$ | $1$ ↗ | $+\infty$ |

5) تحديد وضع $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(D)$

لدينا $f(x)-y=2x-1+\sqrt{x-1}-2x$

$$=-1+\sqrt{x-1}$$

$$=\frac{\left(-1+\sqrt{x-1}\right)\left(-1-\sqrt{x-1}\right)}{-1-\sqrt{x-1}}$$

$$=\frac{1-(x-1)}{-1-\sqrt{x-1}}$$

$$=\frac{x-2}{1+\sqrt{x-1}}$$

بما أن $1+\sqrt{x-1}>0$ لكل $x$ من $]1;+\infty[$

فإن إشارة $f(x)-y$ هي إشارة $x-2$

إذن لدينا الجدول التالي :

| $x$ | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)-x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| وضع $(C)$ بالنسبة لـ $(D)$ | | $(C)$ تحت $(D)$ | تقاطع $(C)$ و $(D)$ | $(C)$ فوق $(D)$ | |

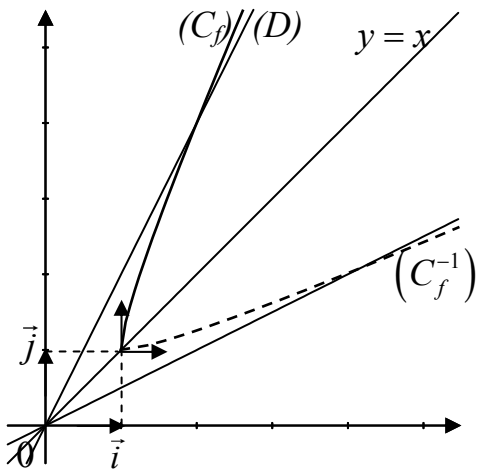
6) أ- لدينا $f$ متصلة و تزايدية على $[1;+\infty[$

إذن فهي تقابل من $[1;+\infty[$ نحو مجال $J$

بحيث : $J=f\left([1;+\infty[\right)=[1;+\infty[$

ب- إنشاء $C_f$ و $C_{f^{-1}}$

$\left(C_{f^{-1}}\right)$ هو مماثل $\left(C_f\right)$ بالنسبة للمستقيم $y=x$ على المجال $[1;+\infty[$.



| تمرين 18 | 7 نقط | عن امتحانات الباكالوريا ، أكاديمية مراكش – فبراير 2000 |
|---|---|---|

لتكن الدالة العددية المعرفة على $[-2,+\infty[$ كما يلي : $f(x)=2\sqrt{(x+2)|x-3|}$

1) a- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b- احسب $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} \frac{f(x)}{x+2}$ و $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} \frac{f(x)}{x-3}$ و $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} \frac{f(x)}{x-3}$ .

2) a- بين أن إشارة $f'(x)$ على $]-2,3[$ هي إشارة $(1-2x)$ ، وأن $f'$ موجبة قطعا على $]3,+\infty[$

b- أعط جدول تغيرات الدالة $f$ .

3) ليكن $C$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$ وليكن $(D)$ المستقيم ذا المعادلة $y=2x-1$ .

a- بين أن المستقيم $(D)$ مقارب للمنحنى $C$ في جوار $+\infty$ .

b- ادرس الوضع النسبي للمنحنى $C$ و المستقيم $(D)$ على المجال $[3,+\infty[$ .

c- ارسم $C$ .

## الحل

$\forall x\in[-2;+\infty[\ ;\ f(x)=2\sqrt{(x+2)|x-3|}$

1)a- لنحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)|x-3|=+\infty$

إذن $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$

b - لنحسب $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} \frac{f(x)}{x+2}$

$$\lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}} \frac{f(x)}{x+2}=\lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}} \frac{2\sqrt{(x+2)|x-3|}}{x+2}$$

$$=\lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}} \frac{2\sqrt{x+2}\sqrt{|x-3|}}{x+2}$$

$$=\lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}} \frac{2\sqrt{|x-3|}}{\sqrt{x+2}}$$

وبما أن $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} \sqrt{x+2}=0^+$

فإن $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} \frac{f(x)}{x+2}=+\infty}$

- لنحسب $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} \frac{f(x)}{x-3}$

$$\lim_{\substack{x\to3\\x>3}} \frac{f(x)}{x-3}=\lim_{\substack{x\to3\\x>3}} \frac{2\sqrt{(x+2)|x-3|}}{x-3}$$

$$=\lim_{\substack{x\to3\\x>3}} \frac{2\sqrt{x+2}\sqrt{x-3}}{x-3}$$

$$=\lim_{\substack{x\to3\\x>3}} \frac{2\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-3}}$$

وبما أن $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} \sqrt{x-3}=0^+$

فإن $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} \frac{f(x)}{x-3}=+\infty}$

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}}\frac{f(x)}{x-3}=\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}}\frac{2\sqrt{(x+2)|x-3|}}{x-3}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}}\frac{2\sqrt{(x+2)(-x+3)}}{x-3}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}}-\frac{2\sqrt{(x+2)(-x+3)}}{(-x+3)}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}}\frac{-2\sqrt{(x+2)}}{\sqrt{-x+3}}$$

وبما أن $\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}}\sqrt{-x+3}=0^{+}$

و $\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}}-2\sqrt{x+2}=-2\sqrt{5}$

فإن $\boxed{\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}}\frac{f(x)}{x-3}=-\infty}$

2) a - نكتب $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة

$$f(x)=\begin{cases}2\sqrt{(x+2)(x-3)} & ;\ x\geq 3\\ 2\sqrt{(x+2)(-x+3)} & ;\ -2\leq x\leq 3\end{cases}$$

- لنحسب $f'(x)$

$$f'(x)=\begin{cases}\left(2\sqrt{(x+2)(x-3)}\right)' & ;\ x>3\\ \left(2\sqrt{(x+2)(-x+3)}\right)' & ;\ -2<x<3\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-1}{\sqrt{(x+2)(x-3)}} & ;\ x>3\\ \dfrac{1-2x}{\sqrt{(x+2)(-x+3)}} & ;-2<x<3\end{cases}$$

وبما أن $\sqrt{(x+2)(-x+3)}>0$ لكل $x$ من $]-2;3[$

فإن إشارة $f'(x)$ على المجال $]-2;3[$ هي إشارة $1-2x$ .

كما أن $\sqrt{(x+2)(x-3)}>0$ لكل $x$ من $]3;+\infty[$

و $2x-1>0$ ( لأن $x>3$ تعني $2x-1>5$ ) .

إذن $f'(x)>0$ لكل $x$ من $]3;+\infty[$ .

b- جدول تغيرات الدالة $f$

| $x$ | $-2$ | | $\frac{1}{2}$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+\infty$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-\infty$ \| $+\infty$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | $5$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

3)a- لنبين أن $(D)$ مقارب للمنحى $C$ بجوار $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-y=\lim_{x\to+\infty}2\sqrt{(x+2)|x-3|}-(2x-1)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}2\sqrt{(x+2)(x-3)}-(2x-1)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4(x+2)(x-3)-(2x-1)^2}{2\sqrt{(x+2)(x-3)}+(2x-1)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-4x-24-4x^2+4x-1}{2\sqrt{(x+2)(x-3)}+(2x-1)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-25}{2\sqrt{(x+2)(x-3)}+(2x-1)}$$

$$=0$$

إذن $\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)-y=0}$

ومنه فإن المستقيم $y=2x-1$ مقارب مائل للمنحى $C$ بجوار $+\infty$ .

b- الوضع النسبي للمنحى $C$ والمستقيم $(D)$ على $[3;+\infty[$

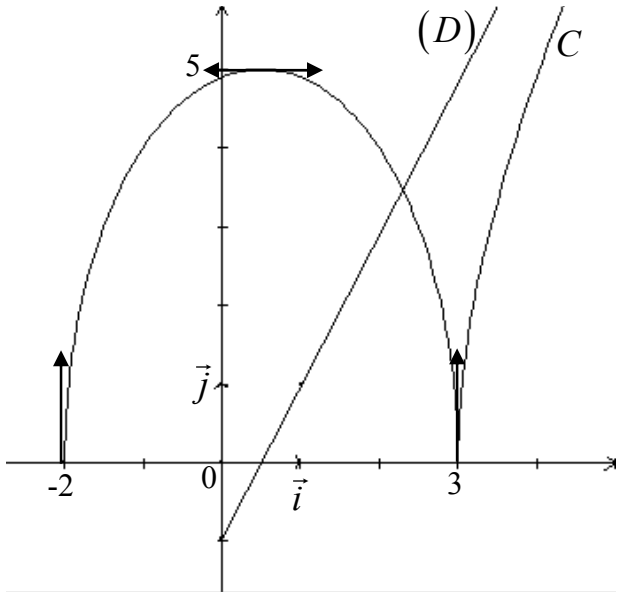
$$f(x)-y=2\sqrt{(x+2)|x-3|}-(2x-1)$$
$$=2\sqrt{(x+2)(x-3)}-(2x-1)$$
$$=\frac{-25}{2\sqrt{(x+2)(x-3)}+(2x-1)}$$

وبما أن $2\sqrt{(x+2)(x-3)}+(2x-1)>0$ لكل $x$ من $[3;+\infty[$

فإن $f(x)-y<0$

إذن المنحى $C$ يوجد تحت المستقيم $(D)$ على المجال $[3;+\infty[$ .

c- إنشاء $C$ .




## تمرين 19 | 7 نقط | عن امتحانات الباكالوريا ، أكاديمية مراكش – فبراير 2002

لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\left(3+\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x}$

1) احسب نهايتي $f$ عند محدي $]0,+\infty[$ .

2) a- بين أن إشارة $f'(x)$ على $]0,+\infty[$ هي إشارة $(x-1)$ .

b- أعط جدول تغيرات الدالة $f$ .

3) ليكن $(C)$ المنحنى الممثل للحالة $f$ في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

a- ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(C)$ .

b- بين أنه $\forall x\in]0,+\infty[\ ,\ f''(x)=\frac{3}{4}x^{\frac{-7}{2}}(5-x^2)$

c- ادرس تقعر المنحنى $(C)$ ؛ ( نأخذ $\sqrt{5}\approx 2,2$ و $f(\sqrt{5})\approx 4,8$ و $f(6)\approx 7,5$ ) .

4) نضع $I=]0,1]$ و $h$ الدالة المعرفة من $I$ نحو $f(I)$ بما يلي : $\forall x\in I\ ,\ h(x)=f(x)$

a- حدد $f(I)$ وبين أن $h$ تقابل .

b- أرسم $(C')$ المنحنى الممثل للدالة $h^{-1}$ في المستوى المنسوب إلى المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ .

## الحل

$$\forall x\in]0;+\infty[\ ;\ f(x)=\left(3+\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x}$$

1) نهايتا $f$ عند محدي $]0;+\infty[$ .

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(3+\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 3\sqrt{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}$$

وبما أن $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{x\sqrt{x}}=+\infty$ و $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\sqrt{x}=0$

فإن $\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty}$

- $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(3+\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x}$

وبما أن $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}=+\infty$ و $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$

فإن $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$

2) a) $\forall x\in]0;+\infty[;f'(x)=\left(\left(3+\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x}\right)'$

$$=\frac{-2}{x^3}\sqrt{x}+\left(3+\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$=\frac{-2\sqrt{x}}{x^3}+\left(\frac{3x^2+1}{x^2}\right)\frac{\sqrt{x}}{2x}$$

$$=\frac{-3\sqrt{x}+3x^2\sqrt{x}}{2x^3}$$

$$=\frac{3\sqrt{x}\left(x^2-1\right)}{2x^3}$$

$$=\frac{3\sqrt{x}(x+1)(x-1)}{2x^3}$$

وبما أن $x\in]0;+\infty[$ فإن $\frac{3\sqrt{x}(x+1)}{2x^3}>0$

إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(x-1)$ لكل $x$ من $]0;+\infty[$ .

b- جدول تغيرات الدالة $f$ .

- إذا كان $0<x<1$ فإن $x-1<0$ أي $f'(x)<0$

- إذا كان $x>1$ فإن $x-1>0$ أي $f'(x)>0$

ومنه لدينا الجدول التالي :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $4$ | ↗ | $+\infty$ |

3) a- الفروع اللانهائية.

- لدينا $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$

إذن $x=0$ ( محول الأراتيب ) مقارب عمودي للمنحنى $(C)$ على يمين 0 بجوار $+\infty$ .

- لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

لنحسب $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(3+\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\sqrt{x}}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2\sqrt{x}}$$

$$=0$$

إذن $y=0$ ( محور الأفاصيل ) فرع شلجمي للمنحنى $(C)$ بجوار $+\infty$ .

b- لنبين أن $\forall x\in]0;+\infty[;f''(x)=\frac{3}{4}x^{\frac{-7}{2}}\left(5-x^2\right)$

لدينا $\forall x\in]0;+\infty[\ ;\ f'(x)=\frac{3\sqrt{x}\left(x^2-1\right)}{2x^3}$

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{x}.x^2-\sqrt{x}}{x^3}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2\sqrt{x}}\right)$$

ومنه $\forall x\in\left]0;+\infty\right[;f''(x)=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2\sqrt{x}}\right)'$

$$=\frac{3}{2}\left(x^{\frac{-1}{2}}-x^{\frac{-5}{2}}\right)'$$

$$=\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}x^{\frac{-3}{2}}-\left(-\frac{5}{2}\right)x^{\frac{-7}{2}}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{5}{2}x^{\frac{-7}{2}}-\frac{1}{2}x^{\frac{-3}{2}}\right)$$

$$=\frac{3}{4}\left(5x^{\frac{-7}{2}}-x^{\frac{-3}{2}}\right)$$

$$=\frac{3}{4}x^{\frac{-7}{2}}\left(5-\frac{x^{\frac{-3}{2}}}{x^{\frac{-7}{2}}}\right)$$

$$=\frac{3}{4}x^{\frac{-7}{2}}\left(5-x^2\right)$$

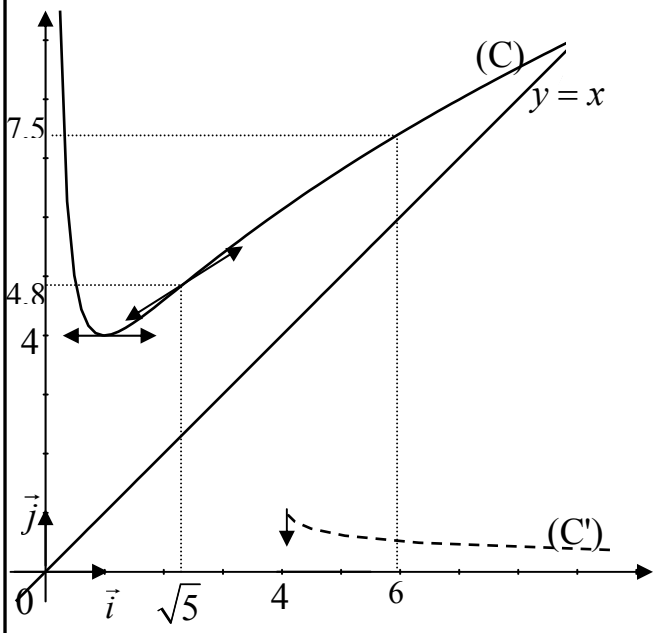
إذن $\boxed{\forall x\in\left]0;+\infty\right[;f''(x)=\frac{3}{4}x^{\frac{-7}{2}}\left(5-x^2\right)}$

c- تقعر المنحنى $(C)$.

لدينا لكل $x$ من $\left]0;+\infty\right[$ إشارة $f''(x)$ هي إشارة $\left(5-x^2\right)$ ؛ ومنه لدينا الجدول التالي :

| $x$ | $0$ | | $\sqrt{5}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| التقعر | | محدب $\cup$ | نقطة انعطاف | مقعر $\cap$ | |

d- إنشاء $(C)$ .




4) نضع $I=\left]0,1\right]$ و $h$ الدالة المعرفة من $I$ نحو $f(I)$ بما يلي :

$$h:I\to f(I)$$
$$x\mapsto\left(3+\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x}$$

a) من خلال التمثيل المبياني السابق لدينا $f(I)=\left[4;+\infty\right[$

- لنبين أن $h$ تقابل .

لدينا $h$ متصلة وتناقصية على $\left]0,1\right]$

ومنه فإن $h$ تقابل من $\left]0,1\right]$ نحو $\left[4,+\infty\right[$

b) المنحنى $(C')$ هو مماثل المنحنى $(C)$ بالنسبة للمستقيم $y=x$ على المجال $\left]0,1\right]$.

( أنظر التمثيل المبياني السابق الخطوط المتقطعة ) .

## تمرين 20 — لتقوية التعلمات

لتكن الدالة $f$ للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = x\sqrt{x} & ; \ x \geq 0 \\ f(x) = \dfrac{\sin x}{1+\sin x} & ; \ -\dfrac{\pi}{2} < x < 0 \end{cases}$$

و $(C_f)$ هو منحنى الدالة $f$ معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$ .

1) حدد $D_f$ حيز تعريف الدالة $f$ .

2) احسب النهايات عند محدات $D_f$ .

3) أ- ادرس اتصال $f$ في النقطة 0 .

ب- ادرس قابلية اشتقاق $f$ في النقطة 0 وأول هندسيا النتيجة المحصل عليها .

4) ادرس تغيرات الدالة $f$ على $D_f - \{0\}$ ، وأعط جدول تغيراتها .

5) أ- ادرس الفروع اللانهائية المنحنى $(C_f)$ .

ب- أنشئ $(C_f)$.

6) لتكن $g$ قصور الدالة $f$ على $I = [0,+\infty[$ .

أ- بين أن $g$ تقابل من $I$ نحو مجال $J$ يجب تحديده .

ب- احسب $g^{-1}(x)$ لكل $x$ من $J$ .

ج- أنشئ $(C_{g^{-1}})$ المنحنى الممثل للدالة $g^{-1}$ في نفس المعلم .

## الحل

1) لنحدد $D_f$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} / 1+\sin x \neq 0 \text{ و } \frac{-\pi}{2} < x < 0\right\}$$

$$= [0;+\infty[ \cup \left\{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{-\pi}{2} \text{ و } \frac{-\pi}{2} < x < 0\right\}$$

$$= [0;+\infty[ \cup \left]\frac{-\pi}{2},0\right[$$

إذن $\boxed{D_f = \left]\frac{-\pi}{2},+\infty\right[}$

2) النهايات عند محدات $D_f$ .

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to\frac{-\pi}{2} \\ x>\frac{-\pi}{2}}} f(x) = \lim_{\substack{x\to\frac{-\pi}{2} \\ x>\frac{-\pi}{2}}} \frac{\sin x}{1+\sin x}$$

وبما أن $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},0\right[ \ ; \ 1+\sin x > 0$

فإن $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{-\pi}{2} \\ x>\frac{-\pi}{2}}} (1+\sin x) = 0^+$

و $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{-\pi}{2} \\ x>\frac{-\pi}{2}}} \sin x = -1$

إذن $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to\frac{-\pi}{2}\\ x>\frac{-\pi}{2}}} f(x)=-\infty}$

3) أ- دراسة الاتصال في النقطة 0 .

لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\sin x}{1+\sin x}=0$

و $f(0)=0$

إذن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=f(0)$

ومنه فإن الدالة $f$ متصلة في النقطة 0 .

ب- دراسة قابلية اشتقاق في 0 .

$$f_d'(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$
$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x\sqrt{x}}{x}$$
$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\sqrt{x}$$
$$=0$$

إذن $\boxed{f_d'(0)=0}$

ومنه فإن الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على يمين 0 وتقبل نصف مماس أفقي .

$$f_g'(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$
$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\frac{\sin x}{1+\sin x}}{x}$$
$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{1+\sin x}$$
$$=1$$

إذن $\boxed{f_g'(0)=1}$

ومنه فإن الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على يسار 0 وتقبل نصف مماس معامله الموجه هو العدد 1 .

مما سبق لدينا : $\boxed{f_d'(0)\neq f_g'(0)}$

إذن الدالة $f$ غير قابلة للاشتقاق في النقطة 0 .

4) تغيرات الدالة $f$ .

$$\begin{cases} f'(x)=\left(x\sqrt{x}\right)' & ;x>0\\ f'(x)=\left(\frac{\sin x}{1+\sin x}\right)' & ;-\frac{\pi}{2}<x<0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} f'(x)=\sqrt{x}+x\frac{1}{2\sqrt{x}} & ;\ x>0\\ f'(x)=\frac{\cos x(1+\sin x)-\cos x.\sin x}{(1+\sin x)^2} & ;-\frac{\pi}{2}<x<0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} f'(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x} & ;\ x>0\\ f'(x)=\frac{\cos x}{(1+\sin x)^2} & ;-\frac{\pi}{2}<x<0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} f'(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x} & ;\ x>0\\ f'(x)=\frac{\cos x}{(1+\sin x)^2} & ;-\frac{\pi}{2}<x<0\end{cases}$$

- إذا كان $x>0$ فإن $f'(x)>0$

- إذا كان $-\frac{\pi}{2}<x<0$

فإن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\cos x$

وبما أن $\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2};0\right[\ ;\ \cos>0$

فإن $\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2};0\right[\ ;\ f'(x)>0$

- جدول تغيرات الدالة $f$ .

| $x$ | $\frac{-\pi}{2}$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $1$ ‖ $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

5) أ- الفروع اللانهائية

- لدينا $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to\frac{-\pi}{2}\\ x>\frac{-\pi}{2}}} f(x)=-\infty}$

إذن $x=-\frac{\pi}{2}$ مقارب عمودي للمنحنى $(C_f)$ على يمين $-\frac{\pi}{2}$ بجوار $-\infty$ .

- لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

لنحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$$

إذن محور الأراتيب اتجاه مقارب للمنحنى $(C_f)$ بجوار $+\infty$.

ب- إنشاء $(C_f)$ .

( أنظر التمثيل المبياني ) .

6) $g$ هي قصور $f$ على $I$

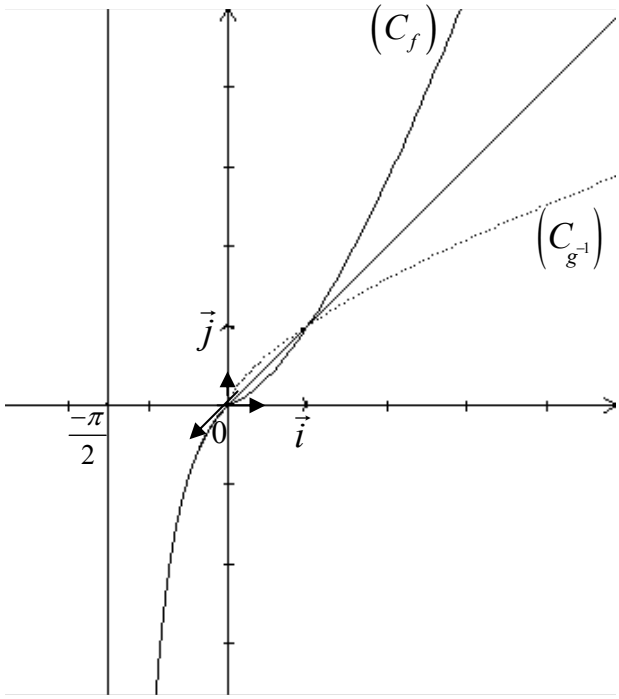
أ- لدينا $g$ تزايدية ومتصلة على $I$

إذن فهي تقابل من $I$ نحو $J$ بحيث :

$$J=f(I)$$
$$=f([0;+\infty[)$$
$$=[0;+\infty[$$

ب- لنحدد $g^{-1}(x)$ لكل $x$ من $[0;+\infty[$

نضع : $g^{-1}(x)=y$




$$g^{-1}(x)=y\Leftrightarrow g(y)=x$$
$$\Leftrightarrow y\sqrt{y}=x$$
$$\Leftrightarrow \left(y\sqrt{y}\right)^2=x^2$$
$$\Leftrightarrow y^3=x^2$$
$$\Leftrightarrow y=\sqrt[3]{x^2}$$

إذن $\boxed{\forall x\in[0,+\infty[;g^{-1}(x)=\sqrt[3]{x^2}}$

ج- إنشاء $(C_{g^{-1}})$

المنحنى $(C_{g^{-1}})$ هو مماثل $C_f$ على $[0;+\infty[$ بالنسبة للمستقيم $y=x$ .

( أنظر التمثيل المبياني السابق الخطوط المتقطعة ).

## تمرين 21 لتقوية التعلمات

لتكن الدالة $f$ للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة بما يلي : $f(x)=\tan^2\frac{x}{2}-2\tan\frac{x}{2}+2$

وليكن $(C_f)$ منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1- حدد $D_f$ مجموعة تعريف الدالة $f$.

2- ادرس دورية الدالة $f$ وحدد مجالا لدراستها $D_E$.

4- أ- ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(C_f)$ على $D_E$.

ب- أنشئ $(C_f)$ على $D_E$.

5- لتكن الدالة $g$ قصور الدالة $f$ على المجال $I=\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$ .

أ- بين أن $g$ تقابل من $I$ نحو مجال يجب تحديده .

ب- أنشئ $(C_{g^{-1}})$ المنحنى الممثل للدالة $g^{-1}$ في نفس المعلم .

## الحل

$$f(x)=\tan^2\frac{x}{2}-2\tan\frac{x}{2}+2$$

1) لنحدد $D_f$ .

$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\frac{x}{2}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$$
$$=\{x\in\mathbb{R}/x\neq\pi+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$$

إذن $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\neq(2k+1)\pi/k\in\mathbb{Z}\}$

2) لدينا $x\mapsto\tan x$ دالة دورية ودورها $\pi$ .

أي أن $x\mapsto\tan\frac{x}{2}$ دالة دورية ودورها $\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$

إذن يكفي دراستها على :

$$D_E=D_f\cap\left]-\pi,\pi\right[=\left]-\pi,\pi\right[$$

3) تغيرات الدالة $f$ على $D_E$

$$\forall x\in D_E\ ;\ f'(x)=\left(\tan^2\frac{x}{2}-2\tan\frac{x}{2}+2\right)'$$

$$=2\tan\frac{x}{2}\times\frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)-2\times\frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)$$

$$=\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)\left(\tan\frac{x}{2}-1\right)$$

- لدينا

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\tan\frac{x}{2}-1=0$$
$$\Leftrightarrow\tan\frac{x}{2}=1$$
$$\Leftrightarrow\tan\frac{x}{2}=\tan\frac{\pi}{4}$$
$$\Leftrightarrow\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}\ \text{و}\ x\in D_E$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}$$

- النهايات عند محدات $D_E$

$$\lim_{\substack{x\to-\pi\\x>-\pi}}f(x)=\lim_{\substack{x\to-\pi\\x>-\pi}}\tan^2\frac{x}{2}-2\tan\frac{x}{2}+2$$

$$= \lim_{\substack{x\to-\pi \\ x>-\pi}} \tan\frac{x}{2}\left(\tan\frac{x}{2}-2\right)+2$$

$$= \lim_{\substack{x\to-\pi \\ x>-\pi}} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}-2\right)+2$$

$$= \left(\frac{-1}{0^+}\right)\left(\frac{-1}{0^+}\right)$$

$$= +\infty$$

إذن $\boxed{\lim_{\substack{x\to-\pi \\ x>-\pi}} f(x) = +\infty}$

$$\lim_{\substack{x\to\pi \\ x<\pi}} f(x) = \lim_{\substack{x\to\pi \\ x<\pi}} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}-2\right)+2$$

$$= \left(\frac{-1}{0^-}\right)\left(\frac{-1}{0^-}\right)$$

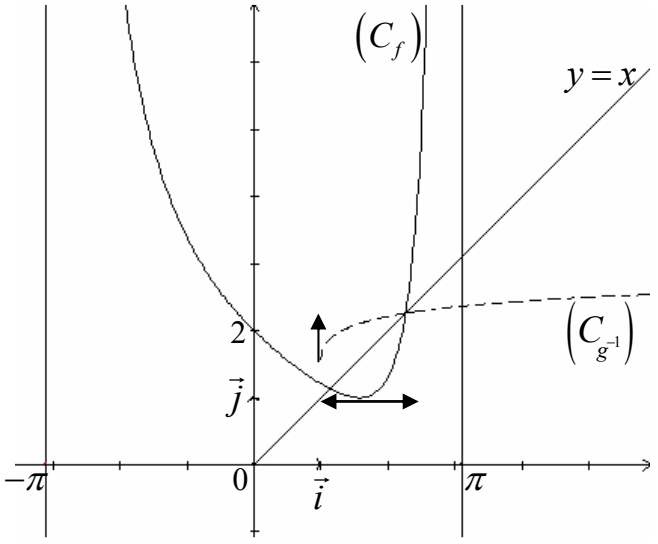
$$= +\infty$$

إذن $\boxed{\lim_{\substack{x\to-\pi \\ x<-\pi}} f(x) = +\infty}$

- جدول تغيرات الدالة $f$ .

| $x$ | $-\pi$ | | $\pi/2$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $1$ | ↗ | $+\infty$ |

4) إنشاء $C_f$




5) أ- $g$ قصور الدالة $f$ على المجال $I = \left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$

لدينا $g$ متصلة وتزايدية إذن فهي تقابل من $I$ نحو $J$

بحيث : $J = f(I) = f\left(\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[\right) = ]1;+\infty[$

ب- إنشاء $(C_{g^{-1}})$

$(C_{g^{-1}})$ هو مماثل $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $y=x$ .

( أنظر التمثيل المبياني السابق الخطوط المتقطعة ) .

## تمرين 22 لتقوية التعلمات

لتكن $f$ الدالة العددية للمتغير الحقيقي $x$ بحيث :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2-1}+x \ ; \ x\in]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[ \\ f(x) = \sin\frac{\pi}{2}x \ ; \ x\in]-1,1[ \end{cases}$$

وليكن $(C_f)$ منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ .

1) حدد $D_f$ مجموعة تعريف الدالة $f$ .

2) احسب نهايات $f$ عند محدات $D_f$ .

3) ادرس اتصال $f$ في النقطتين 1 و 1- .

4) ادرس قابلية اشتقاق $f$ في النقطتين 1 و 1- وأول هندسيا النتيجة .

5) ادرس تغيرات $f$ وأعط جدول تغيراتها .

6) ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(C_f)$.

7) أنشئ المنحنى $(C_f)$ .

8) أنشئ في نفس المعلم المنحنى $(C_g)$ الممثل للدالة $g$ المعرفة بما يلي : $x \in ]-1,1[\ ;\ g(x) = f(-x)$ .

## الحل

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2-1} + x \ ;\ x \in ]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[ \\ f(x) = \sin\frac{\pi}{2}x \ ;\ x \in ]-1,1[ \end{cases}$$

1) لنحدد $D_f$.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2-1 \geq 0 \text{ و } (x \geq 1 \text{ أو } x \leq -1)\} \cup \{x \in \mathbb{R} / -1 < x < 1\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} / x \geq 1 \text{ و } x \leq -1 \text{ أو } -1 < x < 1\}$$

$$= \mathbb{R}$$

إذن $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$

2) لنحسب النهايات عند محدات $D_f$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1} + x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-1} + x$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)}{\sqrt{x^2-1}-x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}-x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}-x} = 0$$

إذن $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0}$

3)- لندرس الاتصال في 1 .

لدينا $\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \sin\frac{\pi}{2}x = 1$

ولدينا $f(1) = 1$

إذن $\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = f(1)$

ومنه فإن الدالة متصلة في النقطة 1 .

- لندرس الاتصال في 1- .

لدينا $\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \sin\frac{\pi}{2}x = -1$

ولدينا $f(-1) = -1$

إذن $\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = f(-1)$

ومنه فإن الدالة $f$ متصلة في النقطة1 - .

4) - لندرس قابلية اشتقاق $f$ في 1 .

$$f'_d(1) = \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$= \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{\sqrt{x^2-1}+x-1}{x-1}$$

$$= \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} + 1$$

$$= \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{\sqrt{(x-1)(x+1)}}{\left(\sqrt{x-1}\right)^2} + 1$$

$$= \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} + 1$$

$$= +\infty$$

إذن الدالة $f$ غير قابلة للاشتقاق على يمين 1 وتقبل نصف مماس عمودي .

- لدينا الدالة $x \mapsto \sin\frac{\pi}{2}x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ،

إذن فهي قابلة للاشتقاق في النقطة 1 .

إذن
$$f_g'(1) = \left(\sin\frac{\pi}{2}x\right)'_{/x=1}$$
$$= \left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x\right)_{/x=1}$$
$$= 0$$

ومنه $f_g'(1) = 0$

أي أن الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على يسار النقطة 1 وتقبل نصف مماس أفقي .

- لندرس قابلية اشتقاق $f$ في النقطة 1- .

$$f_g'(-1) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$$

$$= \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \frac{\sqrt{x^2-1}+x+1}{x+1}$$

$$= \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1} + 1$$

$$= \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \frac{\sqrt{(x-1)(x+1)}}{-\left(\sqrt{-(x+1)}\right)^2} + 1$$

$$= \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} -\sqrt{\frac{(x-1)(x+1)}{(-(x+1))(-(x+1))}} + 1$$

$$= \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} -\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 1$$

$$= -\infty$$

إذن الدالة $f$ غير قابلة للاشتقاق على يسار 1 وتقبل نصف مماس عمودي .

- لدينا الدالة $x \mapsto \sin\frac{\pi}{2}x$ قابلية للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ،

إذن فهي قابلة للاشتقاق في النقطة 1- .

إذن
$$f_d'(-1) = \left(\sin\frac{\pi}{2}x\right)'_{/x=-1}$$
$$= \left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x\right)_{/x=-1}$$
$$= 0$$

ومنه $f_d'(-1) = 0$

أي أن الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على يمين 1 - وتقبل نصف مماس أفقي .

5) تغيرات الدالة $f$ .

$$f'(x) = \begin{cases} \left(\sqrt{x^2-1}+x\right)' ; x \in ]-\infty;-1[ \cup ]1,+\infty[ \\ \left(\sin\frac{\pi}{2}x\right)' \quad ; \quad x \in ]-1,1[ \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} + 1 ; x \in ]-\infty;-1[ \cup ]1,+\infty[ \\ \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x \quad ; \quad x \in ]-1,1[ \end{cases}$$

- على المجال $]-\infty;-1[ \cup ]1,+\infty[$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + 1$$

$$= \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2-1}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)}$$

وبما أن $\sqrt{x^2-1}>0$ لكل $x$ من $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

فإن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $x-\sqrt{x^2-1}$ .

* إذا كان $x<-1$ فإن $x-\sqrt{x^2-1}<0$

أي $f'(x)<0$

* إذا كان $x>1$ فإن $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}>0$

أي $f'(x)>0$

- على المجال $]-1;1[$

لدينا $x\mapsto \sin\frac{\pi}{2}x$ دالة فردية

ولدينا $\forall x\in[0,1[\ ;\ \frac{\pi}{2}x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

أي $\forall x\in[0,1[\ ;\ \cos\frac{\pi}{2}x>0$

أي $\forall x\in[0,1[\ ;\ \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x>0$

إذن $\forall x\in[0,1[\ ;\ f'(x)>0$

ومنه فإن $f$ تزايدية على $[0,1[$

وبما أن $f$ فردية على $]-1,1[$ فإن $f$ أيضا تزايدية على $]-1,0]$ .

- جدول تغيرات $f$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $-\infty$ ‖ | $0$ | $+$ | $0$ ‖ | $+\infty$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $0$ | ↗ | $1$ | ↗ | $+\infty$ |

6) الفروع اللانهائية للمنحنى $(C_f)$.

- لدينا $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ إذن $y=0$ (محور الأفاصيل) مقارب أفقي للمنحنى $(C_f)$ بجوار $-\infty$ .

- لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

لنحسب $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+1$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}{x}+1$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1$$

$$=2$$

- لنحسب : $\lim_{x\to+\infty} f(x)-2x$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-2x=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1}+x-2x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1}-x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}$$

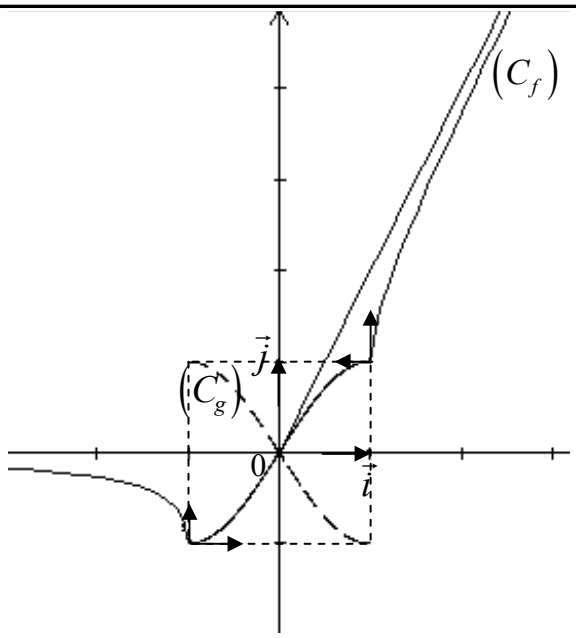
$$=0$$

إذن المستقيم $y=2x$ مقارب مائل لمنحنى الدالة $f$ بجوار $-\infty$.

و لدينا $\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}<0$ أي $f(x)-2x<0$

أي أن $(C_f)$ يوجد تحت مقاربه المائل .

7) إنشاء $C_f$




8) لدينا

$$\forall x \in ]-1,1[\ ;\ g(x) = f(-x)$$
$$= \sin\frac{\pi}{2}(-x)$$
$$= -\sin\frac{\pi}{2}x$$
$$= -f(x)$$

إذن المنحنى $(C_g)$ هو مماثل المنحنى $(C_f)$ بالنسبة لمحور الأفاصيل على المجال $]-1,1[$ .

## تمرين 23 لتقوية التعلمات

نعتبر الدالة $f$ للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = -x + \sqrt[4]{-4x} \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

وليكن $(C_f)$ منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ .

1) حدد $D_f$ حيز تعريف الدالة $f$ .

2) ادرس اتصال $f$ في النقطة 0 .

3) ادرس قابلية اشتقاق $f$ على يسار 0 وأول هندسيا النتيجة .

4) أ- احسب $f'(x)$ لكل $x$ من $D_f - \{0\}$.

ب- أدرس إشارة $f'(x)$ وأعط جدول تغيرات $f$ .

5) أ- ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(C_f)$.

ب- ارسم $(C_f)$ . ( نقبل أن المنحنى $(C_f)$ يقبل نقطة انعطاف في المجال $[-2;-1]$ ) .

## الحل

1) لنحدد $D_f$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / -4x > 0 \text{ و } x < 0\} \cup \{0\}$$

إذن $\boxed{D_f = ]-\infty;0]}$

2) لندرس اتصال $f$ في النقطة 0 .

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} -x + \sqrt[4]{-4x} = 0$$

ولدينا $f(0) = 0$ . إذن الدالة $f$ متصلة في 0 .

3) لندرس قابلية اشتقاق $f$ على يسار 0 .

$$f_g'(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{-x+\sqrt[4]{-4x}}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} -1+\frac{\sqrt[4]{-4x}}{x}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} -1+\frac{\sqrt[4]{-4x}}{-\sqrt[4]{x^4}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} -1-\sqrt[4]{\frac{-4x}{x^4}}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} -1-\sqrt[4]{\frac{-4}{x^3}} = -\infty$$

إذن $f_g'(0) = -\infty$

ومنه فإن الدالة $f$ غير قابلة للاشتقاق على يسار 0 وتقبل نصف مماس عمودي .

4) أ- لنحسب $f'(x)$ لكل $x$ من $D_f - \{0\}$ .

$$\forall x<0 \; ; \; f'(x) = \left(-x+\sqrt[4]{-4x}\right)'$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = -1+\frac{-4}{4.\sqrt[4]{(-4x)^3}}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = -\left(1+\frac{1}{\sqrt[4]{(-4x)^3}}\right)$$

ب- إشارة $f'(x)$

لدينا $\forall x<0 \; ; 1+\frac{1}{\sqrt[4]{(-4x)^3}} > 0$

أي $\forall x<0 \; ; \; -\left(1+\frac{1}{\sqrt[4]{(-4x)^3}}\right) < 0$

إذن $\boxed{\forall x<0 \; ; \; f'(x)<0}$

- جدول تغيرات $f$ .

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $-\infty$ ‖ |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ |

5) أ- الفروع اللانهائية .

- لدينا $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

لنحسب $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x+\sqrt[4]{-4x}}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} -1+\frac{\sqrt[4]{-4x}}{-\sqrt[4]{x^4}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} -1-\sqrt[3]{\frac{-4}{x^3}}$$

$$= -1$$

- لنحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)-(-x)$

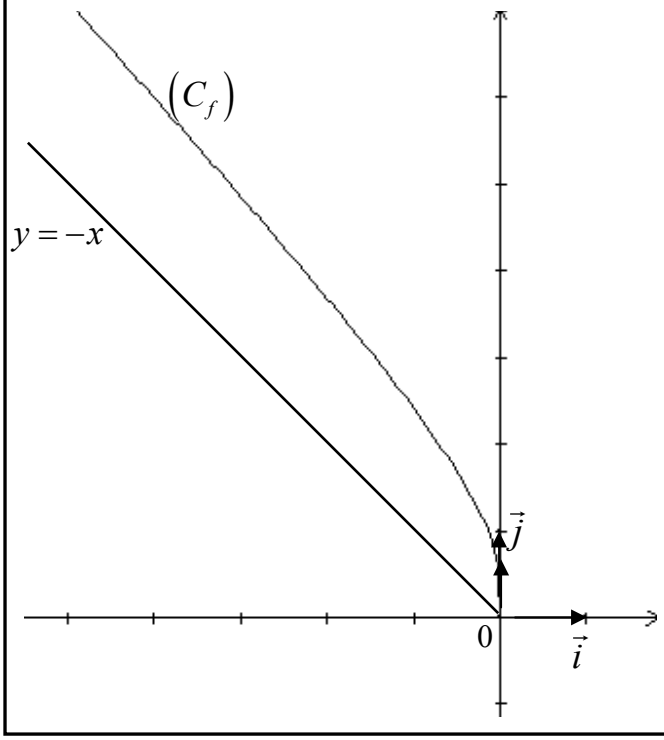
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-(-x) = \lim_{x\to-\infty} f(x)+x$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \sqrt[4]{-4x}$$

$$= +\infty$$

إذن $y=-x$ اتجاه مقارب لـ $(C_f)$ بجوار $-\infty$ .

ب- إنشاء $(C_f)$



## تمرين 24 — لتقوية التعلمات

لتكن $f$ الدالة العددية الحقيقي $x$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = x - 1 - \sqrt{\dfrac{x}{x-1}} & ; x < 0 \\ f(x) = x.\sqrt[3]{1+x} & ; x \geq 0 \end{cases}$$

وليكن $(C_f)$ منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) حدد $D_f$ حيز تعريف الدالة $f$ .

2) أحسب النهايات عند محدات $D_f$.

3) ادرس اتصال $f$ في النقطة 0 .

4) ادرس قابلية اشتقاق $f$ في 0 وأول هندسيا النتيجة المحصل عليها .

5) أدرس تغيرات الدالة $f$ وأعط جدول تغيراتها .

6) أ- ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(C_f)$ .

ب- أنشئ $(C_f)$ .

7) ليكن $g$ قصور الدالة $f$ على المجال $I = [0;+\infty[$ .

أ- بين أن $g$ تقابل من $I$ نحو مجال $J$ يجب تحديده .

ب- أنشئ $(C_{g^{-1}})$ المنحنى الممثل للدالة $g^{-1}$ ، في نفس المعلم .

## الحل

$$\begin{cases} f(x) = x - 1 - \sqrt{\dfrac{x}{x-1}} & ; x < 0 \\ f(x) = x.\sqrt[3]{1+x} & ; x \geq 0 \end{cases}$$

1) لنحدد $D_f$

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{x}{x-1} \geq 0 \text{ و } x < 0\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} / 1+x \geq 0 \text{ و } x \geq 0\right\}$$

$$= ]-\infty;0[ \cup [0;+\infty[$$

$$= \mathbb{R}$$

إذن $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$

2) لنحسب النهايات عند محدات $D_f$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x - 1 - \sqrt{\frac{x}{x-1}}$$

وبما أن $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x-1} = 1$

فإن $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x.\sqrt[3]{1+x} = +\infty$$

3) لندرس الاتصال في النقطة 0 .

$$\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to0\\x<0}} x - 1 - \sqrt{\frac{x}{x-1}} = -1$$

و لدينا $f(0) = 0$

إذن $\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x) \neq f(0)$

ومنه فإن الدالة غير متصلة في 0 .

4) لندرس قابلية اشتقاق $f$ في $0$ .

$$f_d'(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x\sqrt[3]{1+x}}{x}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\sqrt[3]{1+x}$$

$$=1$$

إذن $\boxed{f_d'(0)=1}$

ومنه فإن $f$ قابلة للاشتقاق على يمين $0$ وتقبل نصف مماس معامله الموجه هو العدد $1$ .

إذن $$f_g'(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{x-1-\sqrt{\frac{x}{x-1}}}{x}$$

$$=+\infty$$

إذن $\boxed{f_g'(0)=+\infty}$

ومنه فإن $f$ غير قابلة للاشتقاق على يسار $0$ وتقبل نصف مماس عمودي .

5) لندرس تغيرات الدالة $f$ .

$$\begin{cases} f'(x)=\left(x-1-\sqrt{\frac{x}{x-1}}\right)' & ; x<0 \\ f'(x)=\left(x.\sqrt[3]{1+x}\right)' & ; x>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} f'(x)=1-\dfrac{\frac{-1}{(x-1)^2}}{2\sqrt{\frac{x}{x-1}}} & ; x<0 \\ f'(x)=\sqrt[3]{1+x}+x.\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}} & ; x>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} f'(x)=1+\dfrac{1}{2(x-1)^2}.\sqrt{\frac{x-1}{x}} & ; x<0 \\ f'(x)=\dfrac{3(1+x)+x}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}} & ; x>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} f'(x)=1+\dfrac{1}{2(x-1)^2}.\sqrt{\frac{x-1}{x}} & ; x<0 \\ f'(x)=\dfrac{4x+3}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}} & ; x>0 \end{cases}$$

- إشارة $f'(x)$

* إذا كان $x<0$

فإن $\frac{x-1}{x}>0$ أي $\sqrt{\frac{x-1}{x}}>0$

ومنه $\boxed{\forall x<0\ ;\ f'(x)>0}$

* إذا كان $x>0$

فإن $f'(x)>0$ لكل $x$ من $]0;+\infty[$

ومنه $\boxed{\forall x>0\ ;\ f'(x)>0}$

- جدول تغيرات $f$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $+\infty$ ‖ $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $-1$ ‖ $0$ | ↗ | $+\infty$ |

6) أ- الفروع اللانهائية

- لدينا $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

لنحسب $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1-\sqrt{\frac{x}{x-1}}}{x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x}{x-1}}$$
$$=1$$

لنحسب $\lim_{x\to-\infty}f(x)-x$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)-x=\lim_{x\to-\infty}-1-\sqrt{\frac{x}{x-1}}$$
$$=-2$$

إذن المستقيم الذي معادلته $(D): y=x-2$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ بجوار $-\infty$ .

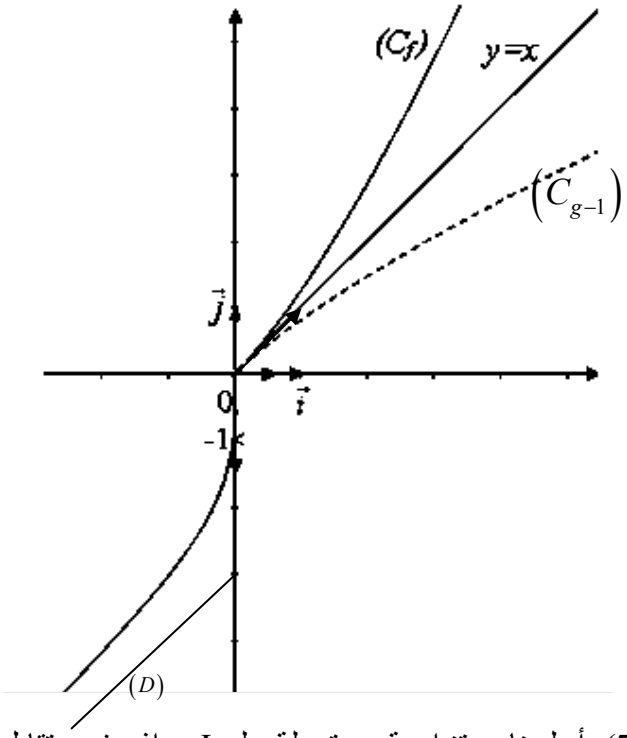
- لدينا $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

لنحسب $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt[3]{1+x}}{x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{1+x}$$
$$=+\infty$$

إذن محور الأراتيب اتجاه مقارب للمنحنى $(C_f)$ بجوار $+\infty$ .

ب- إنشاء $(C_f)$




7) أ- لدينا $g$ تزايدية و متصلة على $I$ ، إذن فهي تقابل من $I$ نحو مجال $J$ بحيث :

$$J=f(I)=f([0;+\infty[)=[0;+\infty[$$

ب- إنشاء $(C_{g^{-1}})$

$(C_{g^{-1}})$ هو مماثل $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y=x$ على المجال $[0;+\infty[$ .

( انظر التمثيل المبياني السابق الخطوط المتقطعة ).