



الصفحة

1

1

# الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا الدورة الاستدراكية 2012 الموضوع

المملكة المغربية

وزارة التربية الوطنية  
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

9	المعامل	RS24	الرياضيات	المادة
4	مدة الإنجاز	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)		الشعبة أو المسلك

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع (4) ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالبنيات الجبرية.....(3.5ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.5ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالحسابيات.....(3ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل.....(7.5ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل.....(2.5ن)

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

**التمرين الأول: (3.5 نقطة) الجزءان I و II مستقلان****I -** لكل  $a$  و  $b$  من المجال  $I = [1, +\infty[$  نضع:  $a \perp b = (\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1)^2$ (1) 0.5 بين أن  $\perp$  قانون تركيب داخلي في  $I$ (2) 0.5 بين أن القانون  $\perp$  تبادلي و تجميعي في  $I$ (3) 0.25 بين أن  $(I, \perp)$  يقبل عنصرا محايدا المطلوب تحديده.**II -** نذكر أن  $(M_2(\mathbb{Q}), +, \times)$  حلقة واحدة.لتكن  $E = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} x & 2(x-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{Q}^* \right\}$ (1) 0.5 بين أن  $E$  جزء مستقر من  $(M_2(\mathbb{Q}), \times)$ (2) نعتبر التطبيق  $\varphi: \mathbb{Q}^* \rightarrow E$ 

$$x \mapsto M(x)$$

أ- بين أن  $\varphi$  تشاكل تقابلي من  $(\mathbb{Q}^*, \times)$  نحو  $(E, \times)$  0.5ب- استنتج بنية  $(E, \times)$  0.5ج- 0.75 بين ان المجموعة  $H = \left\{ \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1} - 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / n \in \mathbb{Q} \right\}$  زمرة جزئية من  $(E, \times)$ **التمرين الثاني: (3.5 نقطة) الجزءان I و II مستقلان**المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ **I -** نعتبر في المجموعة  $\mathbb{C}$  المعادلة  $(E): z^2 - 4\left(1 + \frac{2}{3}i\right)z + \frac{5}{3} + 4i = 0$ (1) 0.5 أ- تحقق أن العدد  $z_1 = 1 + \frac{2}{3}i$  حل للمعادلة  $(E)$ ب- بين أن الحل الثاني للمعادلة  $(E)$  هو  $z_2 = 3z_1$  0.25(2) ليكن  $\theta$  عمدة للعدد  $z_1$ اكتب بدلالة  $\theta$  الشكل المثلثي للعدد العقدي  $\frac{5}{3} + 4i$  0.5**II -** نعتبر ثلاث نقط  $A$  و  $B$  و  $\Omega$  مختلفة مثنى مثنى ألقاها على التوالي هي  $a$  و  $b$  و  $\omega$ ليكن  $r$  الدوران الذي مركزه  $\Omega$  وزاويته  $\frac{\pi}{3}$  نضع  $P = r(A)$  و  $B = r(Q)$ ليكن العدد العقدي  $p$  لحق النقطة  $P$  و العدد العقدي  $q$  لحق النقطة  $Q$ (1) 0.5 أ- بين أن:  $p = \omega + e^{i\frac{\pi}{3}}(a - \omega)$  و  $q = \omega + e^{-i\frac{\pi}{3}}(b - \omega)$ ب- بين أن:  $\frac{1 - e^{i\frac{\pi}{3}}}{1 - e^{-i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$  0.25ج- بين أن:  $\frac{p - a}{q - b} = \frac{\omega - a}{\omega - b} e^{i\frac{4\pi}{3}}$  0.5

$$(2) \text{ نفترض أن } \frac{\omega - a}{\omega - b} = e^{\frac{i2\pi}{3}}$$

أ- بين أن  $APQB$  متوازي الأضلاع . 0.25

ب- بين أن:  $\arg\left(\frac{b-a}{p-a}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$  واستنتج أن الرباعي  $APQB$  مستطيل . 0.75

### التمرين الثالث: (3 نقطة)

(1) أ- تحقق أن 503 عدد أولي . 0.25

ب- بين أن  $7^{502} \equiv 1 [503]$  ثم استنتج أن  $7^{2008} \equiv 1 [503]$  0.75

(2) نعتبر في  $\square^2$  المعادلة  $(E) : 49x - 6y = 1$

علما أن الزوج (1,8) حل خاص للمعادلة (E)، حل في  $\square^2$  المعادلة (E) مبرزا مراحل الحل . 0.5

(3) نضع :  $N = 1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^{2007}$

أ- بين أن الزوج  $(7^{2006}, N)$  حل للمعادلة (E) 0.25

ب- بين أن  $N \equiv 0 [4]$  و  $N \equiv 0 [503]$  1

ج- استنتج أن  $N$  يقبل القسمة على 2012 0.25

### التمرين الرابع: (7.5 نقطة)

**I-** لتكن  $g$  الدالة العددية المعرفة على  $[0, +\infty[$  بما يلي :  $g(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$

(1) ادرس تغيرات الدالة  $g$  على المجال  $[0, +\infty[$  0.5

(2) استنتج إشارة  $g(x)$  على المجال  $[0, +\infty[$  0.5

**II-** لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $\square$  بما يلي :  $f(x) = e^x \ln(1+e^{-x})$

(1) بين أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$  1

(2) بين أنه لكل عدد حقيقي  $x$  لدينا :  $f'(x) = e^x g(e^{-x})$  0.5

(3) ضع جدول تغيرات الدالة  $f$  0.5

(4) أنشئ (C) المنحنى الممثل للدالة  $f$  و (C') المنحنى الممثل للدالة  $(-f)$  في نفس المعلم  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (نقبل أن 1

$-0,7$  قيمة مقربة لأفصول نقطة الانعطاف الوحيدة للمنحنى (C) )

(5) بين أن لكل  $x$  من  $[-1, 0]$  لدينا :  $0 < f'(x) \leq g(e)$  0.75

(6) بين أن المعادلة  $f(x) + x = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في  $\square$  وأن  $-1 < \alpha < 0$  0.75

(7) نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \in \square}$  المعرفة بما يلي :  $u_0 = 0$  و  $u_{n+1} = -f(u_n)$  لكل  $n$  من  $\square$

أ- بين أن :  $-1 \leq u_n \leq 0$  ;  $(\forall n \in \square)$  0.5

ب- بين أن :  $|u_{n+1} - \alpha| \leq g(e)|u_n - \alpha|$  ;  $(\forall n \in \square)$  0.75

ج - استنتج أن :  $|u_n - \alpha| \leq (g(e))^n$  ;  $(\forall n \in \square)$  0.5

د- علما أن  $g(e) < 0,6$  احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  0.25

**التمرين الخامس: (2.5 نقطة)**

نعتبر الدالة العددية  $F$  المعرفة على  $]0, +\infty[$  بما يلي :  $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt$

(1) احسب  $F(1)$  0.25

(2) أ- بين أن الدالة  $F$  قابلة للاشتقاق على  $]0, +\infty[$  واحسب  $F'(x)$  0.75

ب- استنتج أن لكل  $x$  من المجال  $]0, +\infty[$  لدينا:  $F(x) = 0$  0.5

(3) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن لكل  $x$  من  $]0, +\infty[$  لدينا : 0.5

$$F(x) = \left( \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} \right) \ln x - \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\operatorname{Arctan} t}{t} dt$$

(4) بين أن :  $\operatorname{Arc} \tan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc} \tan x$  ;  $(\forall x > 0)$  0.25

(5) استنتج أن :  $\ln x = \frac{2}{\pi} \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\operatorname{Arc} \tan t}{t} dt$  ;  $(\forall x > 0)$  0.25

انتهى الموضوع