



الصفحة

1

1

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا الدورة الاستدراكية 2012 الموضوع

المملكة المغربية

وزارة التربية الوطنية
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

9	المعامل	RS24	الرياضيات	المادة
4	مدة الإنجاز	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)		الشعبة أو المسلك

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع (4) ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالبنىات الجبرية.....(3.5ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.5ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالحسابيات.....(3ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل.....(7.5ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل.....(2.5ن)

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول: (3.5 نقطة) الجزءان I و II مستقلان**I -** لكل a و b من المجال $I = [1, +\infty[$ نضع: $a \perp b = (\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1)^2$ (1) 0.5 بين أن \perp قانون تركيب داخلي في I (2) 0.5 بين أن القانون \perp تبادلي و تجميعي في I (3) 0.25 بين أن (I, \perp) يقبل عنصرا محايدا المطلوب تحديده.**II -** نذكر أن $(M_2(\mathbb{Q}), +, \times)$ حلقة واحدة.لتكن $E = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} x & 2(x-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{Q}^* \right\}$ (1) 0.5 بين أن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{Q}), \times)$ (2) نعتبر التطبيق $\varphi: \mathbb{Q}^* \rightarrow E$

$$x \mapsto M(x)$$

أ- بين أن φ تشاكل تقابلي من (\mathbb{Q}^*, \times) نحو (E, \times) 0.5ب- استنتج بنية (E, \times) 0.5ج- 0.75 بين ان المجموعة $H = \left\{ \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1} - 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / n \in \mathbb{Q} \right\}$ زمرة جزئية من (E, \times) **التمرين الثاني: (3.5 نقطة) الجزءان I و II مستقلان**المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O; \vec{u}, \vec{v})$ **I -** نعتبر في المجموعة \mathbb{C} المعادلة $(E): z^2 - 4\left(1 + \frac{2}{3}i\right)z + \frac{5}{3} + 4i = 0$ (1) 0.5 أ- تحقق أن العدد $z_1 = 1 + \frac{2}{3}i$ حل للمعادلة (E) ب- بين أن الحل الثاني للمعادلة (E) هو $z_2 = 3z_1$ 0.25(2) ليكن θ عمدة للعدد z_1 اكتب بدلالة θ الشكل المثلثي للعدد العقدي $\frac{5}{3} + 4i$ 0.5**II -** نعتبر ثلاث نقط A و B و Ω مختلفة مثنى مثنى ألقاها على التوالي هي a و b و ω ليكن r الدوران الذي مركزه Ω وزاويته $\frac{\pi}{3}$ نضع $P = r(A)$ و $B = r(Q)$ ليكن العدد العقدي p لحق النقطة P و العدد العقدي q لحق النقطة Q (1) 0.5 أ- بين أن: $p = \omega + e^{i\frac{\pi}{3}}(a - \omega)$ و $q = \omega + e^{-i\frac{\pi}{3}}(b - \omega)$ ب- بين أن: $\frac{1 - e^{i\frac{\pi}{3}}}{1 - e^{-i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$ 0.25ج- بين أن: $\frac{p - a}{q - b} = \frac{\omega - a}{\omega - b} e^{i\frac{4\pi}{3}}$ 0.5

$$(2) \text{ نفترض أن } \frac{\omega - a}{\omega - b} = e^{\frac{i2\pi}{3}}$$

أ- بين أن $APQB$ متوازي الأضلاع . 0.25

ب- بين أن: $\arg\left(\frac{b-a}{p-a}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ واستنتج أن الرباعي $APQB$ مستطيل . 0.75

التمرين الثالث: (3 نقطة)

(1) أ- تحقق أن 503 عدد أولي . 0.25

ب- بين أن $7^{502} \equiv 1 [503]$ ثم استنتج أن $7^{2008} \equiv 1 [503]$ 0.75

(2) نعتبر في \square^2 المعادلة $(E) : 49x - 6y = 1$

علما أن الزوج (1,8) حل خاص للمعادلة (E)، حل في \square^2 المعادلة (E) مبرزاً مراحل الحل . 0.5

(3) نضع : $N = 1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^{2007}$

أ- بين أن الزوج $(7^{2006}, N)$ حل للمعادلة (E) 0.25

ب- بين أن $N \equiv 0 [4]$ و $N \equiv 0 [503]$ 1

ج- استنتج أن N يقبل القسمة على 2012 0.25

التمرين الرابع: (7.5 نقطة)

I- لتكن g الدالة العددية المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي : $g(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$

(1) ادرس تغيرات الدالة g على المجال $[0, +\infty[$ 0.5

(2) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $[0, +\infty[$ 0.5

II- لتكن f الدالة العددية المعرفة على \square بما يلي : $f(x) = e^x \ln(1+e^{-x})$

(1) بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ 1

(2) بين أنه لكل عدد حقيقي x لدينا : $f'(x) = e^x g(e^{-x})$ 0.5

(3) ضع جدول تغيرات الدالة f 0.5

(4) أنشئ (C) المنحنى الممثل للدالة f و (C') المنحنى الممثل للدالة $(-f)$ في نفس المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (نقبل أن 1

$-0,7$ قيمة مقربة لأفصول نقطة الانعطاف الوحيدة للمنحنى (C))

(5) بين أن لكل x من $[-1, 0]$ لدينا : $0 < f'(x) \leq g(e)$ 0.75

(6) بين أن المعادلة $f(x) + x = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في \square وأن $-1 < \alpha < 0$ 0.75

(7) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \square}$ المعرفة بما يلي : $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = -f(u_n)$ لكل n من \square

أ- بين أن : $-1 \leq u_n \leq 0$; $(\forall n \in \square)$ 0.5

ب- بين أن : $|u_{n+1} - \alpha| \leq g(e)|u_n - \alpha|$; $(\forall n \in \square)$ 0.75

ج - استنتج أن : $|u_n - \alpha| \leq (g(e))^n$; $(\forall n \in \square)$ 0.5

د- علماً أن $g(e) < 0,6$ احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ 0.25

التمرين الخامس: (2.5 نقطة)

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt$

(1) احسب $F(1)$ 0.25

(2) أ- بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ واحسب $F'(x)$ 0.75

ب- استنتج أن لكل x من المجال $]0, +\infty[$ لدينا: $F(x) = 0$ 0.5

(3) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن لكل x من $]0, +\infty[$ لدينا : 0.5

$$F(x) = \left(\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} \right) \ln x - \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\operatorname{Arctan} t}{t} dt$$

(4) بين أن : $\operatorname{Arc} \tan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc} \tan x$; $(\forall x > 0)$ 0.25

(5) استنتج أن : $\ln x = \frac{2}{\pi} \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\operatorname{Arc} \tan t}{t} dt$; $(\forall x > 0)$ 0.25

انتهى الموضوع