2009

الإتصال و النهايات

EL JOHRA MOHAMED

ثانوية علال بن عبد الله التأهيلية نيابة بنب ملال

30/05/2009

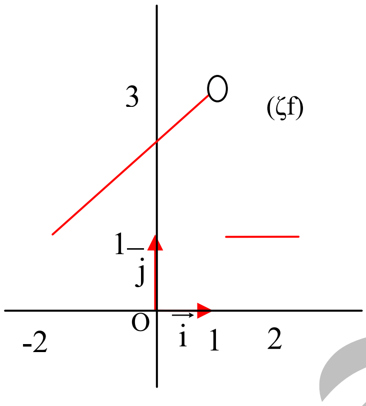
الإتصال و النهايات

الحصة رقم 1

I. الإتصال في نقطة

1. نشاط

لتكن f الدالة العددية التي تمثيلها المبياني هو التالي:



1. حدد مجموعة تعريف الدالة f
2. أحسب $f(-2)$ و $f(0)$ و $f(1)$
3. أحسب $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)$
4. ماذا تستنتج بخصوص اتصال الدالة f في النقطة $x_0=1$؟

2. حل

1. من خلال الشكل حيز تعريف الدالة f هو المجال : $[-2,2]$.
2. لدينا: $f(-2)=1$ و $f(0) = 3$ و $f(1) = 1$
3. لدينا $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=1$ و $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=3$
4. نستنتج أن : $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=1=f(1)$ و منه f دالة متصلة على اليمين في النقطة $x_0=1$

و أن $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=3\neq f(1)$ و منه f دالة غير متصلة على اليسار في النقطة $x_0=1$

خلاصة إن الدالة f غير متصلة في النقطة $x_0=1$.

3. تعريف الإتصال في نقطة

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و x_0 عنصرا من I .

نقول إن الدالة f متصلة في النقطة x_0 إذا كان $\lim\limits_{x\to x0} f(x)=f(x_0)$

4. تعريف الإتصال على اليمين - الإتصال على اليسار

لتكن f دالة معرفة على مجال من شكل $[x_0,x_0+h[$ حيث $h>0$.

نقول إن الدالة f متصلة على اليمين في النقطة x_0 إذا كان $\lim\limits_{x\to x0+} f(x)=f(x_0)$

لتكن f دالة معرفة على مجال من شكل $]x_0-h,x_0]$ حيث $h>0$.

نقول إن الدالة f متصلة على اليسار في النقطة x_0 إذا كان $\lim\limits_{x\to x0-} f(x)=f(x_0)$

5. تمرين تطبيقي1

لتكن f الدالة العددية المعرفة على IR بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\cos(x) - x\sin(3x) - 1}{x^2} ; x \neq 0 \\ f(0) = -\dfrac{7}{2} \end{cases}$$

بين أن الدالة f متصلة في النقطة $x_0=0$.

6. الحل

لدينا لكل x من IR^* :

$$f(x) = \frac{\cos(x) - x\sin(3x) - 1}{x^2}$$

$$= \frac{\cos x - 1}{x^2} - \frac{\sin 3x}{x}$$

و حيث أن $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ و $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3$

فإن $\lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{1}{2} - 3 = -\frac{7}{2}$

إذن $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

و منه فإن f دالة متصلة في $x_0=0$.

الحصة رقم 2

7. دالة الجزء الصحيح

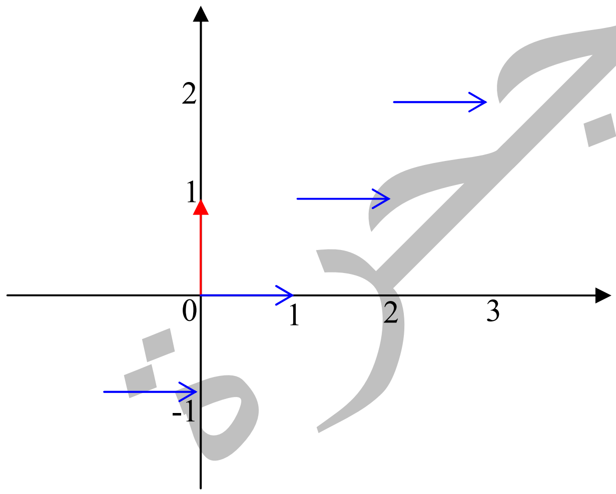
a. تعريف

دالة الجزئ الصحيح هي الدالة التي تربط كل عنصر x من IR بالعدد الصحيح النسبي الوحيد n الذي يحقق $n \le x < n+1$ نرمز لصورة x بهذه الدالة بالرمز E(x).

b. أمثلة

x	2,3	-5,6	7	0	$\sqrt{2}$	-3	13/7
E(x)	2	-6	7	0	1	-3	1

c. التمثيل المبياني للدالة الجزئ الصحيح



d. نتائج

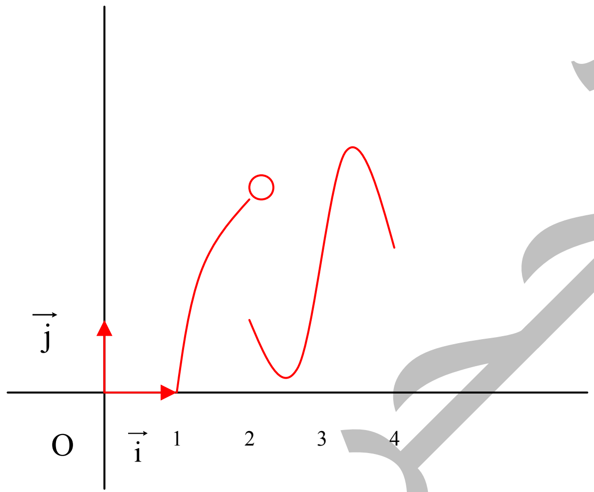
لكل n من Z لدينا:
دالة الجزئ الصحيح متصلة على اليمين في n و غير متصلة على اليسار في n
دالة الجزئ الصحيح متصلة على المجال [n,n+1[
دالة الجزئ الصحيح غير متصلة في n .

الحصة رقم 3

II. الإتصال على مجال

1. نشاط

نعتبر في الشكل أسفله منحنى دالة عددية f معرفة على المجال [1,4].



1) أدرس اتصال الدالة f على اليمين و على اليسار في 2
2) هل الدالة f متصلة في كل نقطة a من المجال]1,4[؟ماذا تستنتج؟
3) لندرس اتصال الدالة f على المجال [2 ;4] متبعين الخطوات التالية :
   a. هل الدالة f متصلة على المجال]2,4[؟
   b. هل الدالة f متصلة على اليمين في 2؟
   c. هل الدالة f متصلة على اليسار في 4؟
   d. ماذا تستنتج بخصوص اتصال الدالة f على المجال [2,4]؟

2. الحل

1) لدينا f(2)=1 و $\lim_{x\to 2^+} f(x)=1$ و $\lim_{x\to 2^-} f(x)=3$

ومنه $\lim_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$ إذن f دالة متصلة على اليمين في النقطة 2.

و $\lim_{x\to 2^-} f(x)\neq f(2)$ إذن f دالة غير متصلة على اليسار في النقطة 2.

2) الدالة f غير متصلة في النقطة 2 من المجال]1,4[، و منه نستنتج أن f غير متصلة على المجال]1,4[.

3)
   a. على المجال]2,4[الدالة f متصلة (لأنه تم إنشاء (ζf) دون تقطع)
   b. الدالة f متصلة على اليمين في 2 لأن: $\lim_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$
   c. الدالة f متصلة على اليسار في 4 لأن $\lim_{x\to 4^-} f(x)=2=f(4)$ (أنظر الشكل)
   d. من a) و b) وc) نستنتج أن الدالة f متصلة على المجال [2,4].

3. تعريف

نقول إن الدالة f متصلة على مجال مفتوح I إذا كانت متصلة في كل عنصر من I .
نقول إن الدالة f متصلة على مجال [a,b] إذا كانت متصلة في كل عنصر من المجال المفتوح]a,b[و متصلة على اليمين في النقطة a و متصلة على اليسار في النقطة b.

4. ملاحظة

نعرف بالمثل اتصال دالة على كل من المجالات [a,b[و]a,b] و[a,+∞[و]-∞,a].

5. تمرين

لتكن h الدالة المعرفة على المجال [0,1] بما يلي:

$$\begin{cases} h(x) = 3x^2 - x - \frac{1}{4} \ ; \ x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\\ h(x) = 1 - \frac{7}{6x+4} \ ; \ x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[\end{cases}$$

بين أن الدالة h متصلة على المجال [0,1] .

6. الحل

الدالة $x \to 3x^2 - x - \frac{1}{4}$ متصلة على IR (كدالة حدودية) و بالخصوص على المجال [0,1/2[.

الدالة $x \to 1 - \frac{7}{6x+4}$ متصلة على {-2/3}-IR (كدالة جذرية متصلة على حيز تعريفها) و بالخصوص فهي متصلة على المجال [1/2,1[

يبقى أن ندرس اتصال الدالة h على اليسار في النقطة $x_0=1/2$:

لدينا: $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ x < \frac{1}{2}}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ x < \frac{1}{2}}} 3x^2 - x - \frac{1}{4} = 0$ و $h\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{7}{\left(6 \times \frac{1}{2}\right) + 4} = 0$

و منه $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ x < \frac{1}{2}}} h(x) = h\left(\frac{1}{2}\right)$ و هذا يعني أن h دالة متصلة على اليسار في النقطة $x_0=1/2$.

نستنتج إذن أن h متصلة على المجال [0,1].

7. اتصال الدوال الإعتيادية

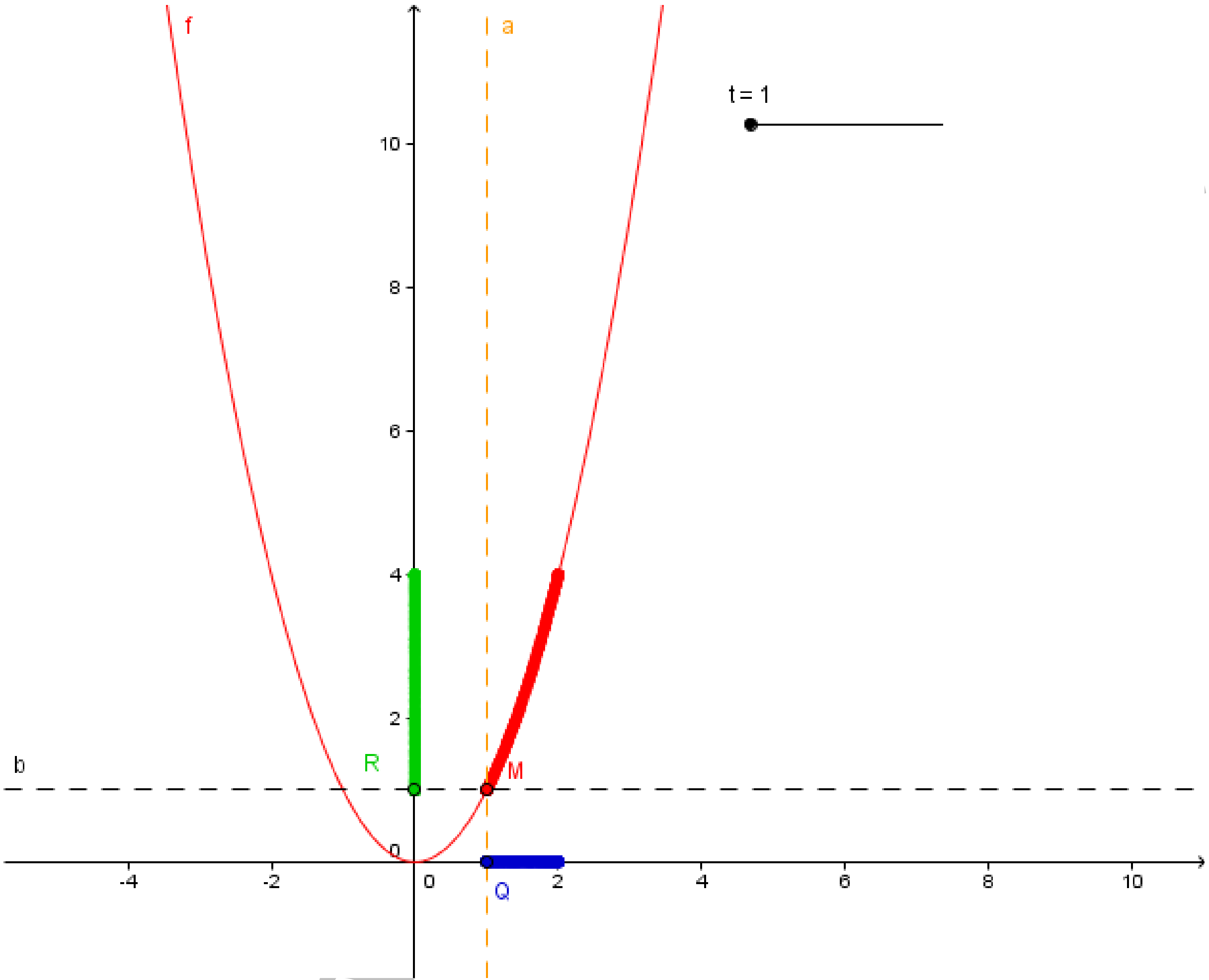
الدوال الحدودية و الدوال الجذرية و الدوال $x \to \sqrt{x}$ و $x \to \cos x$ و $x \to \sin x$ متصلة على كل مجال ضمن حيز تعريفها.

الحصة رقم 4

III. صورة مجال بدالة متصلة

1. مثال 1

نضع $f(x) = x^2$ لنحدد صورة المجال $I = [1 ;2]$

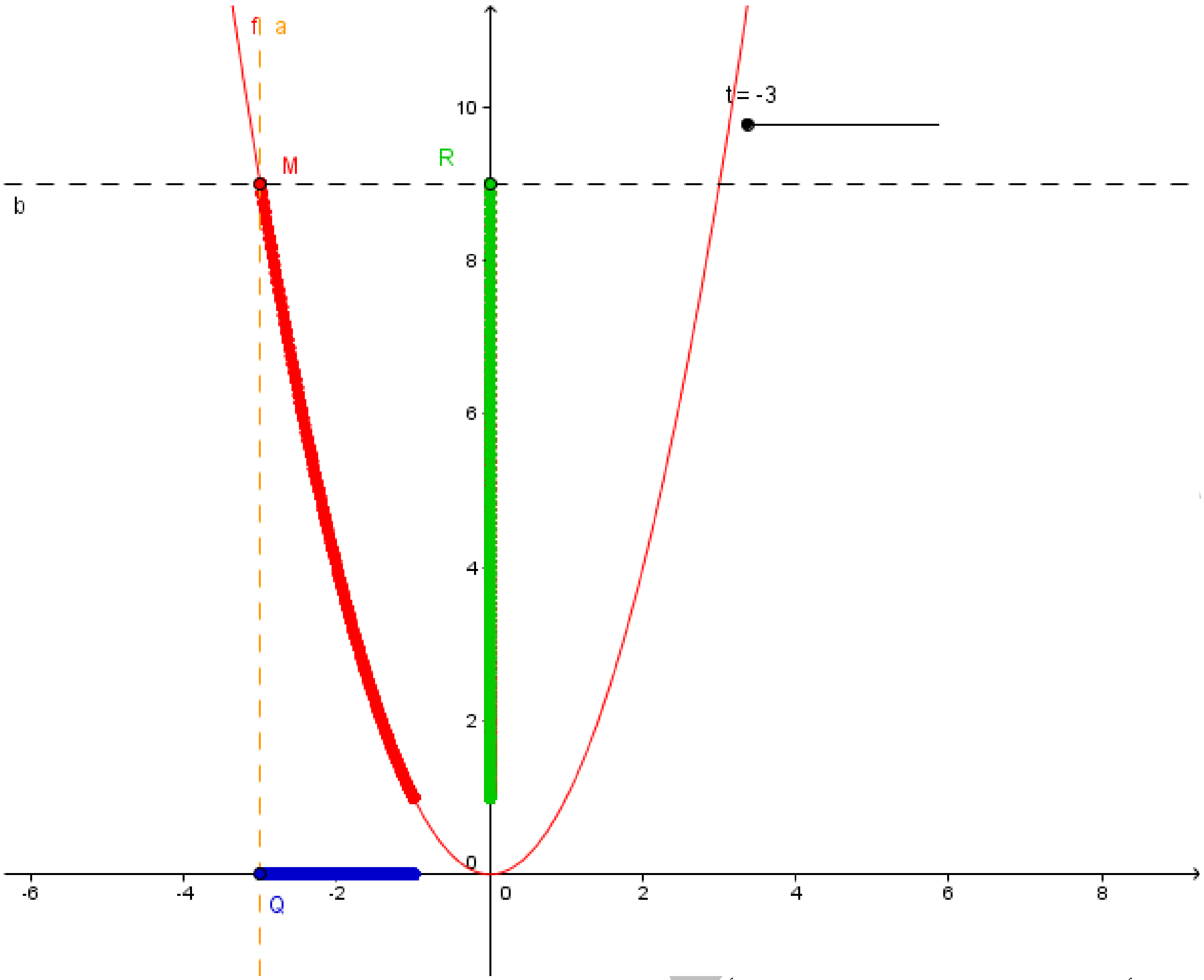


اضغط هنا

نستنتج أن $f(I) = [1 ;4] = [f(1) ;f(2)]$ و ذلك لأن الدالة f تزايدية على المجال $I=[1 ;4]$

2. مثال 2

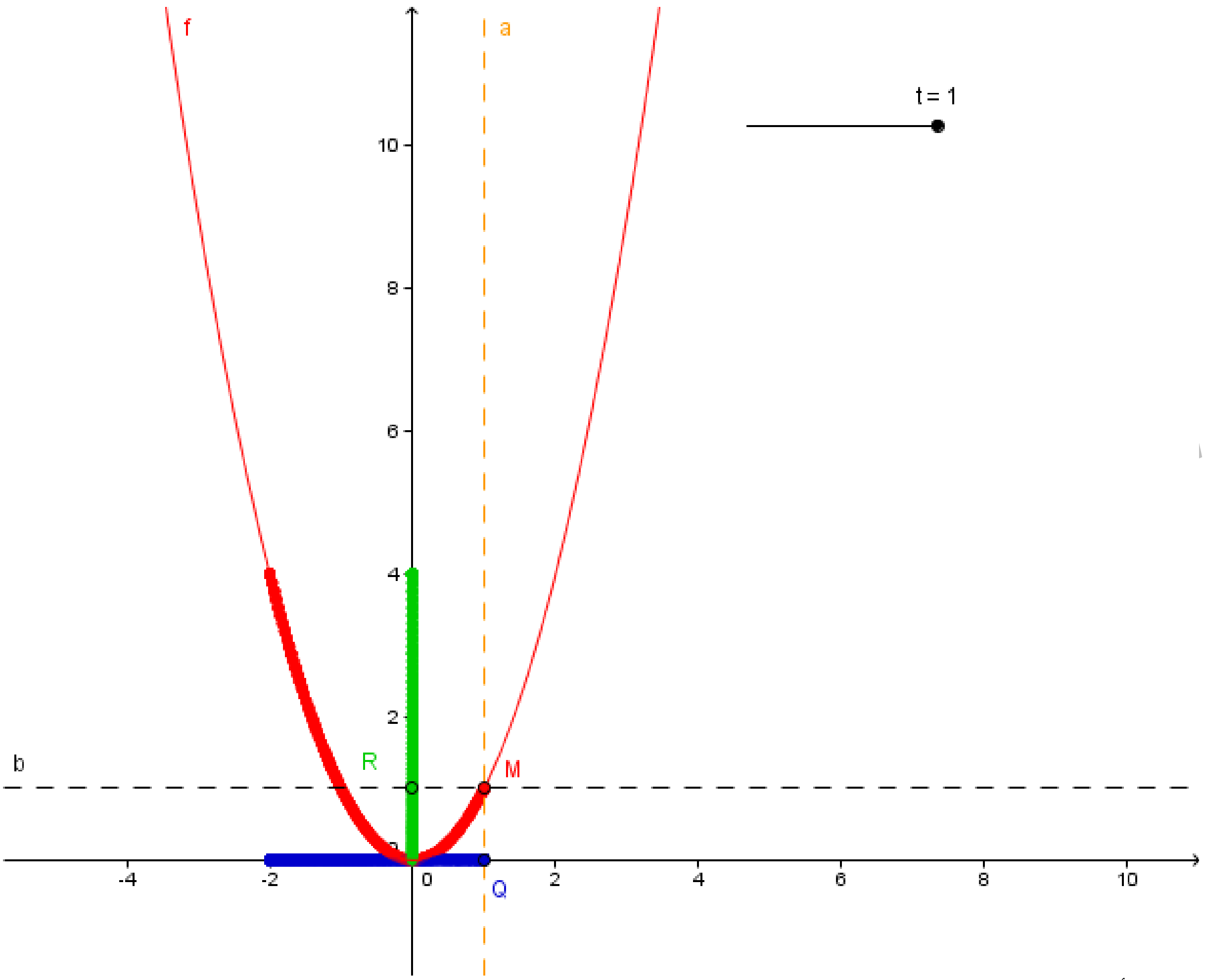
نضع $f(x) = x^2$ لنحدد صورة المجال $J = [-3 ;-1]$



نستنتج أن $f(J) = [1 ;9]= [f(-3) ;f(-1)]$ وذلك لأن الدالة f تناقصية قطعا على المجال $J=[-3 ;-1]$

اضغط هنا

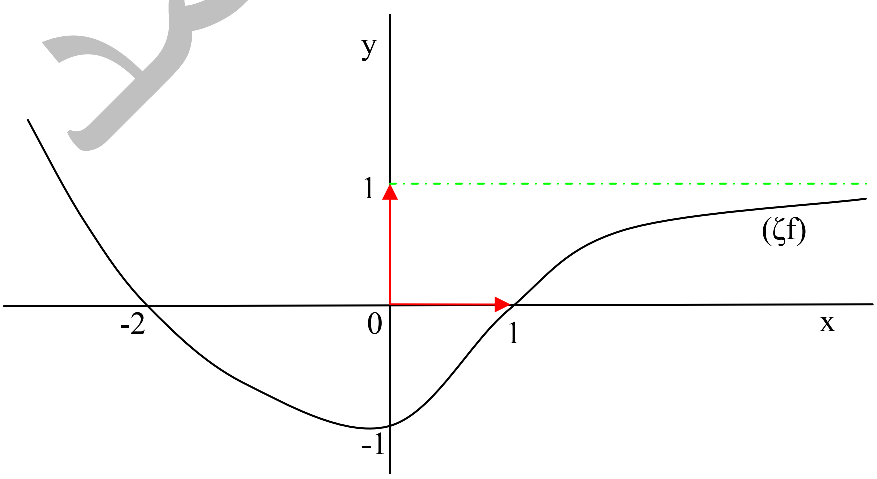
3. مثال 3



نستنتج أن $f(K) = [0 ;4] = [m ; M]$
حيث:
حيث $m=0$ هي القيمة الدنيا للدالة f على المجال $[0 ;4]$
و $M=4$ هي القيمة القصوى للدالة f على المجال $[0 ;4]$

4. تمرين تطبيقي

ليكن (ζf) منحنى دالة f معرفة على IR.



حدد صور المجالات التالية بالدالة f:

]-∞ ;1] و [0 ;+∞[و [-2 ;0]

5. الحل

لدينا :

f([-2,0])=[-1,0]

f([0,+∞[)=[-1,1[

f(]-∞,1])=[-1,+∞[

6. استنتاج

إذا كانت f دالة متصلة على المجال [a,b] فإن:

f([a,b])=[m,M]

حيث m هي القيمة الدنيا للدالة f على المجال [a,b].

و M هي القيمة القصوى للدالة f على المجال [a,b].

7. حالة دالة متصلة و رتيبة قطعا

رتابة الدالة f	المجال I	المجال f(I)=J
f دالة تزايدية قطعا على I	[a,b]	[f(a),f(b)]
	[a,b[	$\left[f(a), \lim\limits_{x\to b-} f(x)\right[$
	]a,b]	$\left]\lim\limits_{x\to a+} f(x), f(b)\right]$
	]a,b[	$\left]\lim\limits_{x\to a+} f(x), \lim\limits_{x\to b-} f(x)\right[$
f دالة تناقصية قطعا على I	[a,b]	[f(b),f(a)]
	[a,b[	$\left]\lim\limits_{x\to b-} f(x), f(a)\right]$
	]a,b]	$\left[f(b), \lim\limits_{x\to a+} f(x)\right[$
	]a,b[	$\left]\lim\limits_{x\to b-} f(x), \lim\limits_{x\to a+} f(x)\right[$

8. خاصية

صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة

صورة مجال بدالة متصلة هي مجال

9. مثال مضاد

حدد J صورة المجال [0,2[بالدالة E (دالة الجزئ الصحيح) ؟ هل J مجال؟

10. الحل

لدينا : E([0,2[)={0,1} وهو ليس بمجال ومنه دالة الجزئ الصحيح ليست متصلة لأنه لو كانت متصلة لكان صورة مجال أيضا مجال. أنظر الخاصية 4

الحصة رقم 5

11.تمرين

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x)=\dfrac{3x+4}{2x+1}$

حدد مجموعة تعريف الدالة f و ادرس رتابة f على المجال $\left]-\infty,-\dfrac{1}{2}\right[$

حدد صورة المجال $\left]-\infty,-\dfrac{1}{2}\right[$ بالدالة f.

12.الحل

لدينا $Df=\left]-\infty,\dfrac{-1}{2}\right[\cup\left]\dfrac{-1}{2},+\infty\right[$

لدينا : $f'(x)=\dfrac{\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & 1\end{vmatrix}}{(2x+1)^2}=\dfrac{-5}{(2x+1)^2}<0$ وذلك لكل x من Df. و بالخصوص لكل x من $\left]-\infty,-\dfrac{1}{2}\right[$

إذن f دالة تناقصية قطعا المجال $\left]-\infty,-\dfrac{1}{2}\right[$

نستنتج إذن أن:

$$f\left(\left]-\infty,\frac{-1}{2}\right[\right)=\left]\lim_{\substack{x\to\frac{-1}{2}\\ x<\frac{-1}{2}}} f(x),\lim_{x\to-\infty} f(x)\right[$$
$$=\left]-\infty,\frac{3}{2}\right[$$

و ذلك لأن $\lim_{\substack{x\to\frac{-1}{2}\\ x<\frac{-1}{2}}} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\dfrac{3}{2}$

IV. اتصال مركب دالتين

لتكن f و g دالتين عدديتين
إذا كانت f متصلة على مجال I و g متصلة على مجال J بحيث f(I) ضمن J فإن الدالة gof متصلة على I.

1. تطبيق 1

بين أن الدالة العددية g المعرفة ب g(x)=cos(x²+7x) متصلة على IR.

2. الحل 1

الدالة g عبارة عن تركيب دالتين: $x\xrightarrow{u}x^2+7x\xrightarrow{\cos}\cos(x^2+7x)$ أي g=(cos)o u

الدالة u متصلة على IR كدالة حدودية

الدالة cos متصلة على IR و بالخصوص على u(IR) الذي هو ضمن IR

إذن g متصلة على IR.

3. خاصية

لتكن f دالة متصلة و موجبة على مجال I

فإن الدالة g المعرفة ب $g(x)=\sqrt{f(x)}$ متصلة على I.

4. برهان

الدالة g هي تركيب الدالتين f و الدالة $u: x \to \sqrt{x}$

لدينا f متصلة على المجال I و الدالة u متصلة على $IR^{+} = [0,+\infty[$ و حيث $f(I) \subset [0,+\infty[$ لأن f دالة موجبة على I فإن الدالة g =uof متصلة على المجال I.

الحصة رقم 6

V. مبرهنة القيم الوسيطية

1. مبرهنة

نعلم أنه إذا كانت f دالة متصلة على المجال [a,b] فإن:

f ([a, b])= [m, M]

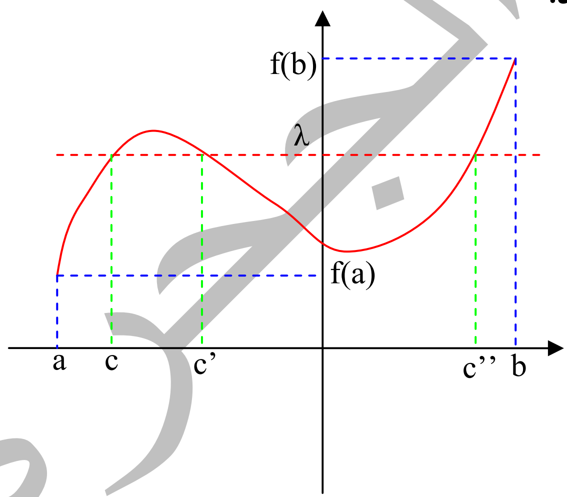
و منه لكل λ من [m,M] فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي c من [a,b] بحيث : f(c)=λ

2. خاصية

إذا كانت f متصلة على المجال [a,b] فإن لكل عدد حقيقي λ بين f(a) و f(b) يوجد على الأقل عدد حقيقي c من [a,b] بحيث

f(c)=λ

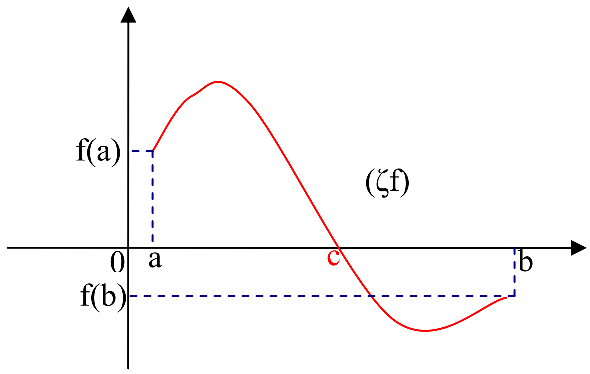
الشكل:



3. نتيجة 1

إذا كانت f متصلة على المجال [a,b] و كان f(a).f(b)<0 فإن المعادلة f(x)=0 تقبل حلا على الأقل في المجال [a,b].

الشكل :



4. تطبيق

بين أن المعادلة cos(x)=x تقبل حلا على الأقل في المجال I=[0,π]

5. الحل

نضع f(x)=cos(x)-x

الدالة f متصلة على المجال I كمجموع دالتين متصلتين على I

لدينا f(0)=1>0 و f(π)=-1-π < 0 إذن f(0)xf(π) < 0

بالتالي المعادلة f(x)=0 أي المعادلة cos(x)=x تقبل حلا على الأقل في المجال I=[0,π]

6. تمرين

نعتبر الدالة g المعرفة على IR بما يلي: $g(x)=\sin x + 2\cos(x)$
تحقق من أن $g(0)>0$ و أن $g(\pi/2)<\pi/2$
أثبت أن المعادلة $g(x)=x$ تقبل حلا على الأقل في المجال $[0,\pi/2]$.

7. الحل

التحقق :
$g(0)=2>0$ و $g(\pi/2)=1<\pi/2$.
نضع $h(x)=g(x)-x$ أي $h(x)=\sin x + 2\cos(x)-x$
الدالة h متصلة IR كمجموع دوال متصلة على IR و بالتالي h متصلة على المجال $[0,\pi/2]$
و لدينا $h(0)\times h(\pi/2)<0$
إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $[0,\pi/2]$
أي أن المعادلة $g(x)=x$ تقبل حلا على الأقل في المجال $[0,\pi/2]$

الحصة رقم 7

VI. طريقة التفرع الثنائي لتأطير حلول المعادلة f(x)=0.

1. نشاط

نعتبر الدالة f المعرفة على IR بما يلي: $f(x)=x^3+x+1$
تحقق أن f دالة متصلة و تزايدية قطعا على IR و أن f(IR)=IR.
استنتج أن المعادلة f(x)=0 تقبل حلا و حيدا α في IR.
أحسب f(0) و f(-1) ثم استنتج أن $\alpha \in]-1,0[$
أحسب f(-1/2)
هل α ينتمي إلى المجال]-1,-1/2[أم إلى المجال]-1/2 ,0[؟ علل جوابك؟
حدد إشارة صورة مركز المجال]-3/4,-1/2[؟
استنتج أن : -0,75 < α < -0,625 ؟
ما هي الدقة التي تم بها تأطير العدد α؟

1. الحل

الدالة المعرفة ب $f(x)=x^3+x+1$ متصلة على IR كدالة حدودية
و لدينا $f'(x)=3x^2+1 > 0$ لكل x من IR و منه f دالة تزايدية قطعا على IR
و

$$\begin{aligned} f(IR) &= \left]\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[\\ &=]-\infty,+\infty[\\ &= IR \end{aligned}$$

الدالة f متصلة و تزايدية قطعا على IR و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty < 0$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty > 0$ إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية المعادلة f(x)=0 تقبل حلا وحيدا α في IR.
f(0)=1 و f(-1)=-1 إذن حسب م ق و $\alpha \in]-1,0[$
f(-1/2)=3/8
لدينا f(-1)xf(-1/2)<0 إذن حسب م ق و $\alpha \in \left]-1,\frac{-1}{2}\right[$
مركز المجال $\left]-1,\frac{-1}{2}\right[$ هو -3/4. و f(-3/4)=-11/64 < 0.
لدينا f(-3/4)<0 و f(-1/2) > 0 إذن حسب م ق و لدينا $\alpha \in \left]-\frac{3}{4},\frac{-1}{2}\right[$
و مركز المجال $\left]-\frac{3}{4},\frac{-1}{2}\right[$ هو -5/8 و f(-5/8)=67/512 > 0 و f(-3/4)=-11/64 < 0 إذن حسب م ق و فإن
$\alpha \in \left]-\frac{3}{4},\frac{-5}{8}\right[$ أي -0,75 < α < -0,625
دقة هذا التأطير هي : 0,125.

2. التجربة

تجربة بواسطة الحاسوب لتأطير العدد α إلى الدقة r المرغوب فيها

الحصة رقم 8

VII. الدالة العكسية لدالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال

1. خاصية

إذا كانت f دالة عددية متصلة و رتيبة قطعا على مجال I فإن لكل y من f(I) المعادلة f(x)=y تقبل حلا وحيدا في المجال I

2. تعريف

لتكن f دالة عددية متصلة و رتيبة قطعا على مجال I. و ليكن J صورة المجال I بالدالة f (f(I)=J)
الدالة التي تربط كل عنصر y من J بالعنصر الوحيد x من I بحيث f(x)=y تسمى الدالة العكسية للدالة f. و نرمز لها بالرمز f^{-1}.

3. نتائج

لتكن f دالة عددية متصلة و رتيبة قطعا على مجال I. و لتكن f^{-1} دالتها العكسية،نضع J=f(I) لدينا:

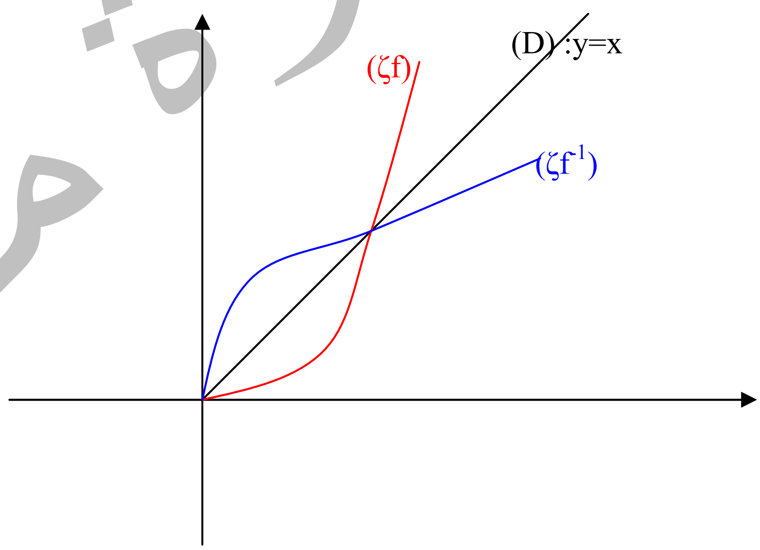
$$\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$$

$$(\forall x \in I) \quad f^{-1}of(x) = x$$

$$(\forall x \in J) \quad fof^{-1}(x) = x$$

4. خاصيلت الدالة العكسية

إذا كانت f دالة عددية متصلة و رتيبة قطعا على مجال I و f^{-1} دالتها العكسية فإن:
f^{-1} متصلة على المجال J.
f^{-1} رتيبة قطعا على المجال J و لها نفس رتابة f على المجال I.
منحنى الدالة f^{-1} هو مماثل منحنى الدالة f بالنسبة للمستقيم الذي معادلته y=x في معلم متعامد ممنظم
الشكل:



5. تمرين

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ بما يلي : $f(x) = \sqrt{2x-1}$
بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يتم تحديده
حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J.
انشئ في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم (ζf) و (ζf^{-1}) التمثيلين المبيانيين للدالتين f و f^{-1}.

6. الحل

الدالة $x \to 2x-1$ متصلة و موجبة على المجال $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

ومنه الدالة f متصلة على المجال $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

الدالة f تزايدية قطعا على المجال $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

لأن:

$$\left(\forall x \geq \frac{1}{2}\right)\left(\forall x' \geq \frac{1}{2}\right) \quad x < x' \Rightarrow 0 < 2x+1 < 2x'+1$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x+1} < \sqrt{2x'+1}$$

$$\Rightarrow f(x) < f(x')$$

إذن f تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J.

لنحدد J:

$$\begin{aligned} J &= f(I) \\ &= f\left(\left[\frac{1}{2},+\infty\right[\right) \\ &= \left[f\left(\frac{1}{2}\right), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[\\ &= [0,+\infty[\end{aligned}$$

لنحدد $f^{-1}(x)$ لكل x من $J = [0,+\infty[$

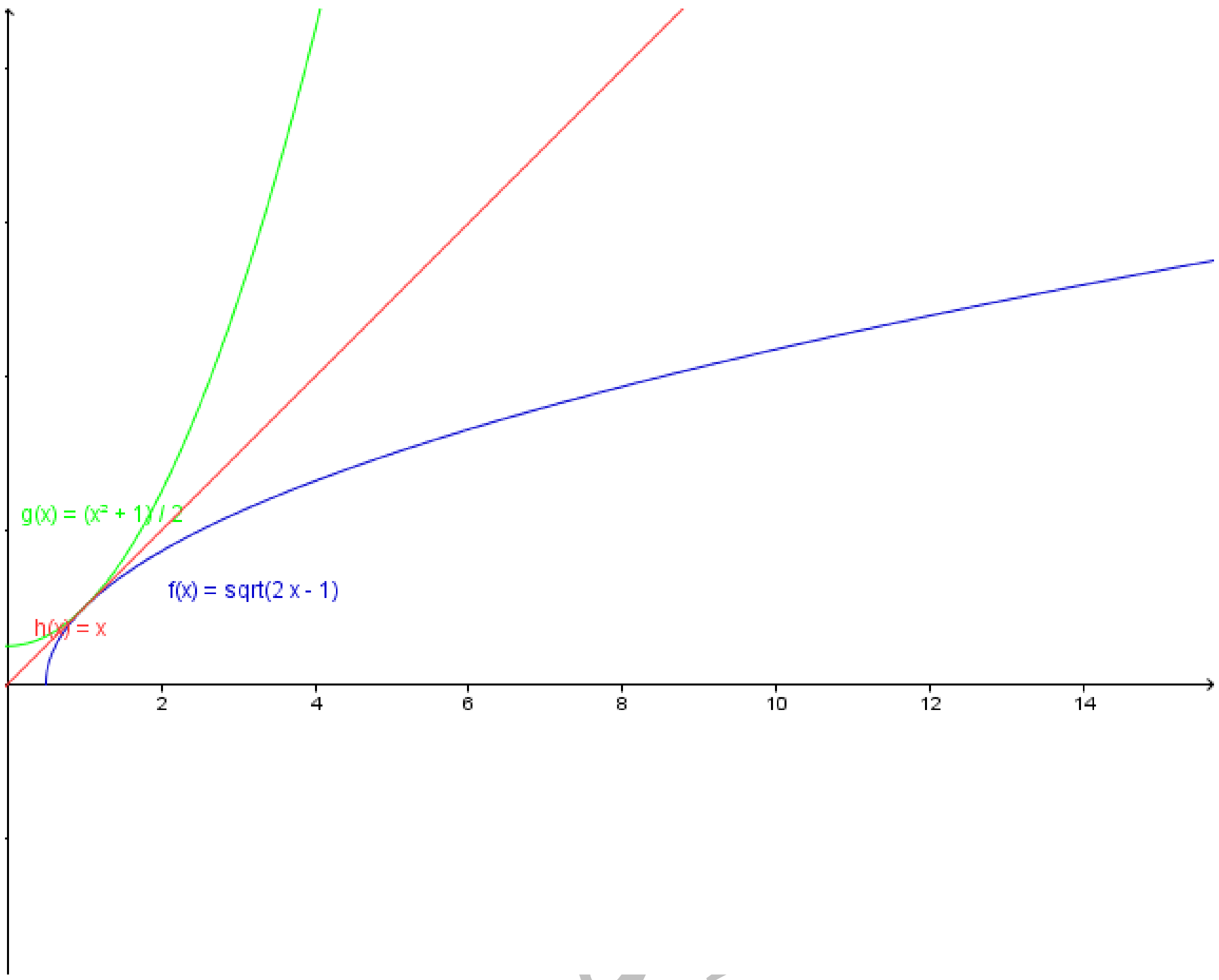
$$(\forall x > 0)\ \left(\forall y > \frac{1}{2}\right)$$

لدينا :

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) = y &\Leftrightarrow f(y) = x \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2y-1} = x \\ &\Leftrightarrow 2y-1 = x^2 \\ &\Leftrightarrow y = \frac{x^2+1}{2} \end{aligned}$$

و منه $(\forall x > 0)\ \ f^{-1}(x) = \dfrac{x^2+1}{2}$

إنشاء (ζf) و (ζf^{-1}) في نفس المعلم م م


g(x) = (x² + 1) / 2
f(x) = sqrt(2 x - 1)
h(x) = x
2
4
6
8
10
12
14

الحصة رقم 9

VIII. دالة الجذر من الرتبة n

1. تمهيد

ليكن n من IN^*

الدالة f المعرفة ب $f(x)=x^n$ متصلة و تزايدية قطعا على المجال $[0,+\infty[$ نحو $[0,+\infty[$ (لأن $f(0)=0$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$)

إذن f تقبل دالة عكسية

2. تعريف

ليكن n من IN^*

الدالة العكسية للدالة f المعرفة ب $f(x)=x^n$ على المجال $[0,+\infty[$ تسمى دالة الجذر من الرتبة n و نرمز بالرمز $\sqrt[n]{\ }$

العدد $\sqrt[n]{x}$ يسمى الجذر من الرتبة n للعدد x.

و لدينا : $\begin{cases} y^n = x \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[n]{x} = y \\ x > 0 \end{cases}$

3. نتائج

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$$

$$(\forall a > 0) : \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \sqrt[n]{a^n} = a$$

الدالة $\sqrt[n]{\ }$ تزايدية قطعا على $[0,+\infty[$ و منه:

$$(\forall a > 0)(\forall b > 0) \quad : \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a = b$$

$$(\forall a > 0)(\forall b > 0) \quad : \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a > b$$

4. العمليات على الجذور من الرتبة n

ليكن n و m عنصرين من IN^* و a و b عنصرين من IR^+

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$\sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}}$ و $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ حيث b>0

$\sqrt[mn]{a^m} = \sqrt[n]{a}$ و $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

5. مركب دالة f و دالة الجذر من الرتبة n

لتكن f دالة موجبة على مجال I .

إذا كانت f دالة متصلة على I فإن $\sqrt[n]{f}$ متصلة على i

إذا كان $\lim_{x\to x0} f(x) = l \geq 0$ فإن $\lim_{x\to x0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$

إذا كان $\lim_{x\to x0} f(x) = +\infty$ فإن $\lim_{x\to x0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$

مع x_0 يؤول إلى ∞ أو على اليمين أو على اليسار

6. تمرين : معادلات و متراجحات لا جذرية

حل في IR المعادلة $(E) : \sqrt[5]{3x-4} = 2$

حل في IR المتراجحة $(F) : \sqrt[6]{2x-3} < 2$

7. الحل

المعادلة (E) معرفة إذا و فقط إذا كان $3x-4\geq 0$ أي $x\geq \frac{4}{3}$

$$\sqrt[5]{3x-4}=2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-4=2^5 \\ x\geq \frac{4}{3} \end{cases}$$

ومنه

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-4=32 \\ x\geq \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=12 \\ x\geq \frac{4}{3} \end{cases}$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (E) هي S={4/3}

المتراجحة (F) معرفة إذا وفقط إذا كان $2x-3\geq 0$ أي x≥3/2

$$\sqrt[6]{2x-3}<2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3<2^6 \\ x\geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3<64 \\ x\geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x<\frac{67}{2} \\ x\geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x\in \left[\frac{3}{2},\frac{67}{2}\right[$$

و منه مجموعة حلول المتراجحة (F) هي [S=[3/2 , 67/2 .

الحصة رقم 10

IX. القوى الجذرية $(r \in Q^*)$ x^r لعدد حقيقي موجب قطعا

1. تعريف

نضع $r = \frac{p}{q}$ عددا جذريا حيث $(p \in Z^*)$ و $(q \in IN^*)$ و x عددا حقيقيا موجبا قطعا

القوة الجذرية للعدد x ذات الأس r هو العدد المرموز له بالرمز x^r بحيث $x^r = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$

2. مثال

لنكتب على شكل قوة أساسها العدد 5 العدد $A = \sqrt[3]{5^2} \times \sqrt[6]{5}$

لدينا:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt[3]{5^2} \times \sqrt[6]{5} \\ &= 5^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{1}{6}} \\ &= 5^{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}} \\ &= 5^{\frac{5}{6}} \end{aligned}$$

3. تمرين : مقارنة و تبسيط أعداد تحتوي على $\sqrt[n]{\ }$

قارن الأعداد : $a = \sqrt[4]{3}$ **و** $b = \sqrt[5]{4}$ **و** $c = \sqrt[10]{15}$

بسط العدد $A = \frac{\sqrt[15]{3^5} \times \sqrt[3]{9} \times \left(\sqrt[5]{9}\right)^3}{\sqrt[3]{3}}$

4. الحل

المقارنة

لدينا ppmc(4,5,10)=20

$$a^{20} = \left(\sqrt[4]{3}\right)^{20} = \left(\left(\sqrt[4]{3}\right)^4\right)^5 = 3^5 = 243$$

$$b^{20} = \left(\sqrt[5]{4}\right)^{20} = \left(\left(\sqrt[5]{4}\right)^5\right)^4 = 4^4 = 256$$

$$c^{20} = \left(\sqrt[10]{15}\right)^{20} = \left(\left(\sqrt[10]{15}\right)^{10}\right)^2 = 15^2 = 225$$

ومنه $c^{20} < a^{20} < b^{20}$

أي : $\sqrt[10]{15} < \sqrt[4]{3} < \sqrt[5]{4}$

التبسيط

$$A = \frac{\sqrt[15]{3^5} \times \sqrt[3]{9} \times \left(\sqrt[5]{9}\right)^3}{\sqrt[5]{3}}$$
$$= \frac{\sqrt[3]{\sqrt[5]{3^5}} \times \sqrt[3]{3^2} \times \left(\sqrt[5]{3^2}\right)^3}{\sqrt[5]{3}}$$
$$= \frac{\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{3^2} \times \sqrt[5]{3^6}}{\sqrt[5]{3}}$$
$$= \sqrt[3]{3 \times 3^2} \times \sqrt[5]{3^5}$$
$$= 3 \times 3$$
$$= 9$$

5. تمرين

حل في IR المعادلة : $(2x-1)^{\frac{2}{3}} = 16$

6. الحل

الكتابة $(2x-1)^r$ معرفة إذا كان 2x-1>0 أي x > ½

$$(2x-1)^{\frac{2}{3}} = 16 \Leftrightarrow \left((2x-1)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = 16^{\frac{3}{2}}$$
$$\Leftrightarrow (2x-1) = (4^2)^{\frac{3}{2}} = 4^3$$
$$\Leftrightarrow 2x-1 = 64$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{65}{2}$$

X. سلسلة تمارين

تمرين تطبيقي 2

لتكن f الدالة العددية المعرفة على IR بما يلي :
$$\begin{cases} f(x) = x^2+1; x \geq 0 \\ f(x) = \dfrac{1}{x-1}; x < 0 \end{cases}$$

ملاحظة : قصور دالة

الصيغة $f_1(x)=x^2+1$ تسمى قصور الدالة f على المجال [0,+∞[
الصيغة $f_2(x)=1/(x+1)$ تسمى قصور الدالة f على المجال]-∞,0[

تحقق من أن $\lim_{x\to0+} f(x) = f(0)$

هل الدالة f متصلة على اليسار في النقطة $x_0=0$؟
هل الدالة f متصلة في النقطة $x_0=0$؟.

حل

حسب تعريف الدالة f لدينا $f(0)=0^2+1=1$

و لدينا $\lim_{x\to0+} f(x) = \lim_{x\to0+} x^2+1 = 1$

ومنه $\lim_{x\to0+} f(x) = f(0)$

إذن الدالة f متصلة على اليمين في النقطة $x_0=0$.

لدينا $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0-1} = -1$

ومنه $\lim_{x\to 0-} f(x) \neq f(0)$

نستنتج إذن أن الدالة f غير متصلة على اليسار في النقطة $x_0=0$.

بما أن f غير متصلة على اليسار في النقطة $x_0=0$ فإنها غير متصلة في النقطة $x_0=0$.

تمرين تطبيقي 3

لتكن f الدالة العددية المعرفة على IR بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = x + a \quad ; \quad x < 1 \\ f(x) = 2x - 3 \; ; \; 1 \le x \le 3 \\ f(x) = bx + 1 \; ; x > 3 \end{cases}$$

حدد العددين a و b علما أن الدالة f متصلة على اليسار في النقطة 1 و على اليمين في 3.

الحل

الدالة f متصلة على اليسار في النقطة 1 و منه:

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim_{x\to 1-} x + a = f(1) = 2\times 1 - 3$$

$$\Leftrightarrow 1 + a = -1$$

$$\Leftrightarrow a = -2$$

الدالة f متصلة على اليمين في النقطة 3 و منه:

$$\lim_{x\to 3+} f(x) = f(3) \Leftrightarrow \lim_{x\to 3+} bx + 1 = f(3) = 2\times 3 - 3$$

$$\Leftrightarrow 3b + 1 = 3$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{2}{3}$$