المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي

التدريب الأول من 28 يناير إلى فاتح فبراير 2012
الفرض الأول (مدة الإنجاز 4 ساعات)

أولمبياد الرياضيات 2012

Exercice 1 (Bulgarian NAO) Existe-t-il deux entiers strictement positifs n et k ,$1\leq k\leq n-2$ tel que $\binom{n}{k}^2+\binom{n}{k+1}^2=\binom{n}{k+2}^4$? $\left(C_n^k=\binom{n}{k}\right)$	**التمرين 1** هل يوجد عددان صحيحان موجبان قطعا n و k ، $1\leq k\leq n-2$ بحيث $\binom{n}{k}^2+\binom{n}{k+1}^2=\binom{n}{k+2}^4$ ؟ $\left(C_n^k=\binom{n}{k}\right)$
Exercice 2 (Mangolian MO) Soit n un entier naturel non nul .Trouver toutes les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que : $\forall x,y\in\mathbb{R}^*\ \ x^nf(y)-y^nf(x)=f\left(\frac{y}{x}\right)$	**التمرين 2** ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم. أوجد جميع الدوال $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ بحيث : $x^nf(y)-y^nf(x)=f\left(\frac{y}{x}\right)$ لكل x و y من $\mathbb{R}^*$
Exercice 3 (Singapore MS) Soient x , y et z trois réels strictement positifs tels que $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{xyz}$. Montrer que $\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{2y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{2z}{\sqrt{1+z^2}}<3$	**التمرين 3** لتكن x و y و z ثلاثة أعداد حقيقية موجبة قطعا بحيث : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{xyz}$ بين أن $\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{2y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{2z}{\sqrt{1+z^2}}<3$
Exercice 4 (China) Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus et S un point appartenant à l'intérieur de ce triangle tel que $\angle SAB=\angle SBC=\angle SCA$. Les droites (AS),(BS) et (CS) coupent les cercles circonscrits aux triangles SBC ,SCA et SAB aux points A_1,B_1 et C_1 respectivement . Montrer que : $P(A_1CB)+P(B_1AC)+P(C_1BA)\geq 3P(ABC)$	**التمرين 4** ليكن ABC مثلثا زواياه حادة و S نقطة داخل هذا المثلث بحيث $\angle SAB=\angle SBC=\angle SCA$. المستقيمات (AS) و (BS) و (CS) تقطع الدوائر المحيطة بالمثلثات SBC و SCA و SAB في النقط A_1 و B_1 و C_1 (مخالفة للنقطة S) على التوالي . بين أن : $P(A_1CB)+P(B_1AC)+P(C_1BA)\geq 3P(ABC)$ (نرمز ب $P(MNK)$ لمساحة المثلث MNK)